大 学

数学系

自学丛书

高等代数

上册

GAO DENG DAISHU

大学数学系 自学丛书

空间解析几何
高等代数
数学分析
常微分方程
复变函数论
实变函数论
高等几何
计算方法
概率论与数理统计
近世代数
微分几何
电子计算机与算法语言 BASIC

统一书号：7090·226
定　　价：1.90 元

大学数学系自学丛书

高等代数

上册

东北师范大学

贺昌亭 主编

辽宁人民出版社

一九八二年·沈阳

目　录

学习指导

第一章　数的基础知识

本章把以下要用到的有关数的一些基本性质集中起来讲三个问题：

1. 自然数与数学归纳法；
2. 整数的整除性；
3. 数域。

这些内容在中学数学里大部分都已讲过，因此这里主要目的是集中复习一下这些知识，以便下面引用。

为了以下说和写的方便，我们先介绍几个数学用语及符号。

集合

随便一些对象（事物）做为整体，叫做一个集合。特别地，以数为对象组成的集合简称为数集。以下常用大写的拉丁字母表示集合。

例如，一切正整数的整体组成一个数集，叫做自然数集，记作

$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$或 $N\vdots 1, 2, 3, \cdots$。

一切整数也组成一个数集，叫整数集。通常用Z表示整数集，即记作

$$Z=\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

或

$$Z\vdots \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots。$$

而集合

$A\vdots\ ax^2+bx+c=0$；其中a，b，c为任意实数，且$a\neq0$，是由一切实系数一元二次方程为对象组成的。

$B\vdots(x, 0)$；x为任意实数，

这个集合B就是平面上给定笛卡儿直角坐标系之后，以横坐标轴上

的点为对象组成的。

元素

设X为任一集合. 组成集合X的每一个对象都叫做X的一个元素. 一般用小写的拉丁字母表示元素. 如果x是X的一个元素，则称x属于X或说X含有x，记作$x\in X$. 如果x不是X的一个元素，则称x不属于X或说X不含有x，记作$x\bar{\in} X$.

例如，正整数1，2，3都属于自然数集N，即$1\in N$，$2\in N$，$3\in N$，而N不含有-1，0，所以$-1\bar{\in} N$，$0\bar{\in} N$。类似地，一元二次方程$x^2+2x+1=0$与$x^2-1=0$都是集合A的元素，所以$x^2+2x+1=0\in A$，$x^2-1=0\in A$；但$x-1=0\bar{\in} A$,因为A不含有一次方程。再有我们用倒写的A表示“任意的”意思，比如，“a是自然数集N的任意一个自然数”这句话的内容便可记作：$\forall a\in N$。

相等

设X,Y为任二集合. 如果X与Y是由完全相同的元素组成的，即凡属于X的元素都属于Y，同时凡属于Y的元素也都属于X，则称X与Y是相同的集合，也叫X与Y相等，记作$X=Y$。例如

$$X=\{1,\ -1\},$$

$$Y=\{k\mid k\text{是}x^2-1=0\text{ 的根}\}^*$$

这里X是由1，-1两个数组成的数集，Y是以方程$x^2-1=0$的根为元素组成的集合，而$x^2-1=0$恰有两个根：1，-1，所以Y的元素也是1与-1这两个数。于是X与Y是相同的集合，即$X=Y$。

子集

如果集合X的元素都属于集合Y，则称X是Y的一个子集，记作$X\subseteq Y$. 当$X\subseteq Y$但$X\neq Y$时就说X是Y的真子集，记作$X\subset Y$. 例如N是Z的一个子集而且是真子集，所以$N\subset Z$。再如用Q、D、C分别表示有理数集、实数集和复数集时，于是

$$Q\subseteq D\subseteq C \text{ 且 } Q\subset D\subset C.$$

---

* 我们常用这样的符号表示集合，即在花括号中划一竖线，竖线前边的字母表示该集合的元素，竖线后边标出这些元素所应满足的条件。

空集

有时做为集合来考虑的整体，当中不含有任何元素，例如

$$X=\{k\mid k\text{为}x^2+1=0\text{的实根}\}.$$

因为一元二次方程 $x^2+1=0$ 没有实根，所以集合X不含有任何元素．尽管这样，把不含有任何对象的整体也叫做集合是方便的．今后称不含有任何对象的整体叫空集，记作ϕ，并且我们认为空集是任一集合X的子集，即 $\phi\subseteq X$。

§1　自然数与数学归纳法

人们在长期的实践中从数数逐渐认识了自然数及其基本性质．所谓自然数就是

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots \tag{1}$$

这些数．如前所述通常用N表示一切自然数组成的数集．

大家已经知道自然数集N的以下三方面的基本性质：

（Ⅰ）自然数集N可以进行加法、乘法运算，即任意两个自然数相加的和是自然数，相乘的积也是自然数．例如

$$1+1=2,\ 2+1=3,\ 2\cdot 3=6,\ 1\cdot 4=4\text{等等},$$

特别地，任意一个自然数m都可以由1自身相加得出来：

$$m=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m\text{个}}.$$

（Ⅱ）自然数之间有大小关系，象（1）那样写出一切自然数时，恰好是从左往右由小到大的把自然数列举出来了，即

$$1<2<3<\cdots<n<\cdots.$$

一般说来，对任二自然数a，b那么$a<b$当且仅当有自然数c，使$b=a+c$．特别地，若$b=a+1$，则$a<b$，这时就说a与b是相邻的，b叫做a的“紧后边的”数，也说b是a的后继数。

1是自然数集N中最小的数，即对任何自然数n，如果$n\neq 1$那么$1<n$。

（Ⅱ）自然数集N的形成规律利用加法可以表述如下：

1是自然数，1加1得2是自然数，2加1得3是自然数，如此累次加1就得到了全体自然数．换句话说：1是自然数从1起始累次加1就得到了全体自然数．自然数集的这种构成性质是很朴素的，也很容易被人们所理解，它正是人们数数过程的数学概括．

我们并不满足于自然数集构成性质的这种朴素的表述．其中累次加1是一个无止境的过程，这当然是由事物的无限性所决定的．但是这种无限过程只不过是"加1"这种同一方式的无限重复而已．因此我们有可能把这种同一方式的无限重复过程精练归纳为一次完成的递推过程．这样，对自然数的构成性质我们就又有一种精化了的表述．

第一归纳原理　设M是自然数集N的一个子集．如果M具有以下两条性质：

1．1在M里；

2．若k在M里则$k+1$也在M里，那么一切自然数都在M里．

归纳原理是人们对自然数集构成性质认识的深化和精化，其重要意义在于它给我们提供一种进行数学证明的方法——数学归纳法．

我们用例子来说明用数学归纳法做证明的方法．

例1　证明：前n个正奇数的和等于n^2，即

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \qquad (2)$$

这是一个与自然数有关的命题，要证明的是（2）式对一切自然数n都成立．可是自然数有无穷多个，用有限的时间不可能进行无限次的验证．自然数集的第一归纳原理为解决这个有限与无限的矛盾提供了有力的方法，即数学归纳法．

为了证明（2）式对一切自然数n都成立，我们用M表示使（2）式成立的自然数组成的数集．换句话说，自然数k在M里当且仅当$n=k$时（2）式成立．于是（2）式对一切自然数n都成立

当且仅当M含有一切自然数，即$M=N$。这样，根据第一归纳原理，我们可以分两步验证$M=N$：

1） 1在M里，即当$n=1$时（2）式成立；

2）若k在M里则$k+1$也在M里，即假设$n=k$时（2）式成立可以推出 $n=k+1$时（2）式也成立。如此便得$M=N$。

事实上

1）当$n=1$时（2）式左端$=1$，右端$=1^2=1$，所以（2）式成立，即1在M里。

2）假设$n=k$时（2）式成立。我们看 $n=k+1$的情形，则有

$$\begin{aligned}&1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\=&[1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)\\=&k^2+(2k+1)\\=&(k+1)^2.\end{aligned}$$

因此当$n=k+1$时（2）式也成立，即若k在M里时$k+1$也在M里。这样根据第一归纳原理，便得 $M=N$，即（2）式对一切自然数n都成立。

把上述论证方法概括一下就是有名的数学证明方法——第一数学归纳法：

设$P(n)$是与一切自然数有关的命题。如果

1）当$n=1$时命题P（1）成立；

2）假设 $n=k$ 时命题 $P(k)$ 成立，可推出 $n=k+1$ 时命题$P(k+1)$也成立，那么命题$P(n)$对一切自然数n都成立。

为了说话方便，我们把 1）叫递推起点， 2）叫递推过程，2）中的假设叫做归纳假设。

例2　证明：对一切自然数n

$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1) \qquad (3)$$

都成立。

证　用第一数学归纳法，步骤如下：

1) 当$n=1$时，(3)式左端$=2$，右端$=1\cdot(1+1)=2$，所以(3)式成立；

2) 假设$n=k$时(3)式成立，看$n=k+1$的情形，则有

$$
\begin{aligned}
&2+4+6+\cdots+2k+2(k+1)\\
&=(2+4+6+\cdots+2k)+2(k+1)\\
&=k(k+1)+2(k+1)\\
&=(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

因此$n=k+1$时(3)式也成立．这样(3)式对一切自然数n都成立。

例 3 证明：n边形的内角和等于$(n-2)\pi$。

这是一个与多边形的边数n有关的命题．由于多边形的边数至少是三个，所以这个命题只与3以后的自然数有关，即与$\geqslant 3$的自然数有关．这样用数学归纳法做证明时，递推起点应该是3．一般地，当一个命题$P(n)$仅与$\geqslant k_0$的自然数有关时，用数学归纳法去做证明的递推起点就是k_0，于是第一数学归纳法的格式为

1．当$n=k_0$时命题$P(k_0)$成立；

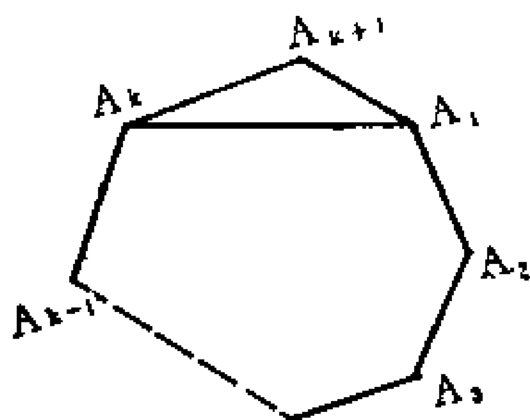
2．假设当$n=k\geqslant k_0$时命题$P(k)$成立可推出$n=k+1$时命题$P(k+1)$也成立，那么对一切$\geqslant k_0$的自然数n，命题$P(n)$都成立。

下面我们就用第一数学归纳法的这个格式来证明例3．此处$k_0=3$．事实上

1) 当$n=3$时，三角形的内角和等于π，即$(3-2)\pi$，所以命题$P(3)$成立。

2) 假设当$n=k\geqslant 3$时命题$P(k)$成立，看$n=k+1$的情形．

这里需要推证的是$k+1$边形的内角和等于$(k-1)\pi$．为此把以A_1，A_2，…，A_k，A_{k+1}为顶点的$k+1$边形〔$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$〕分成两个多边形（如右图）：一个是以



A_1，A_2，…，A_k 为顶点的k边形〔$A_1A_2\cdots A_k$〕，另一个是以A_1，A_k，A_{k+1}为顶点的三角形〔$A_1A_kA_{k+1}$〕。于是

$$\begin{aligned}&〔A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}〕\text{的内角和}\\=&〔A_1A_2\cdots A_k〕\text{的内角和}+〔A_1A_kA_{k+1}〕\text{的内角和}\\=&(k-2)\pi+\pi\\=&(k-1)\pi,\end{aligned}$$

因此，当$n=k+1$时命题$P(k+1)$也成立。这样，命题$P(n)$对一切$\geqslant 3$的自然数n都成立。

有些与自然数有关的命题$P(n)$由于内容的内在特点，命题$P(k+1)$不仅与命题$P(k)$有联系，而且与命题$P(k)$，$P(k-1)$，…，$P(2)$，$P(1)$当中的某些个命题有联系。这样，单从命题$P(k)$成立就推不出命题$P(k+1)$成立。于是第一数学归纳法对这类命题的证明就用不上了。为此我们有必要提出自然数集构成性质的另一表述形式，即第二归纳原理，从而相应的有第二数学归纳法。

第二归纳原理 设M是自然数集N的一个子集。如果M具有以下两条性质：

1) 1在M里；

2) 若$\leqslant k$的自然数都在M里则$k+1$也在M里，那么一切自然数都在M里，即$M=N$。

与第二归纳原理相应的有第二数学归纳法：

设$P(n)$是与一切自然数有关的命题。如果

1) 当$n=1$时命题$P(1)$成立；

2) 假设对$\leqslant k$的自然数m命题$P(m)$都成立时可推出命题$P(k+1)$也成立，那么命题$P(n)$对一切自然数n都成立。

与第一数学归纳法一样，第二数学归纳法的递推起点也可以是某一个大于1的自然数k_0。

例4 设数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

其中$a_1=3$，$a_2=7$，而$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}(n=3, 4, \cdots)$。试证通项公式为$a_n=2^{n+1}-1$。

证　我们用第二数学归纳法来证明。

1）当$n=1$时$a_1=3$，$2^{1+1}-1=3$，所以对$n=1$公式成立；

2）假设对$n=1, 2, \cdots, k$时公式都成立，看$n=k+1$的情形，于是

$$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}=3(2^{k+1}-1)-2(2^k-1)=2^{k+2}-1.$$

因此对$n=k+1$公式也成立。这样对一切自然数n，$a_n=2^{n+1}-1$都成立。

练　习　一

1. 证明　$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. 证明　$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. 证明　$\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

4. 证明　对一切自然数n，$2^n>n$都成立。

5. 证明二项式公式：

$$(a+b)^n=a^n+c_1^n a^{n-1}b+\cdots+c_r^n a^{n-r}b^r+\cdots+b^n,$$

其中

$$c_r^n=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

是n个元素中取r个元素的组合数。

§2　整数的整除性

所谓整数就是…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…。全体整数组成的数集记作$\mathbf{Z}$，即

$\mathbf{Z}$：…，-3，-2，-1，0，1，2，3，…。

显然整数集 Z 由三部分数合并而成，即

正整数　1，2，3，…；

负整数　-1，-2，-3，…；

数 0，这是唯一的不是正数也不是负数的整数。

整个这节都是复习性质的，一般叙述从简，论述较为详细之处则是必要的重复。

我们还是以运算为线索，从整数集 Z 的运算性质谈起。

大家知道，整数集可以进行加法、减法和乘法运算。人们常把可以进行加、减、乘三种运算的数集叫做数环。整数集 Z 构成的数环叫整数环。

在整数环里除法运算是不能进行的，因为并不是对任意两个整数 a 与 b，其中 $b\neq 0$，都有唯一的整数 q 存在使

$$a=bq \tag{1}$$

成立。例如，尽管对 6 与 2 有整数 3，使

$$6=2\cdot 3$$

成立，但没有哪一个整数 q，能使

$$2=6\cdot q$$

成立。当然对于 4 与 5 既没有使 $4=5\cdot q$ 的整数 q 也没有使 $5=4\cdot q$ 的整数 q。于是虽然对某两个整数 a 与 b（$\neq 0$）确有整数 q 使（1）式成立，但不是对每两个整数 a 与 b（$\neq 0$）都有整数 q 使（1）式成立。所以整数集 Z 不能进行除法。

这样，对于两个整数 a 与 b 是否有整数 q 使（1）式成立就成了整数集中两个整集 a 与 b 之间的一种特殊关系，由此引出了整除的概念。

设 $a, b\in \mathbf{Z}$。如果存在 $q\in \mathbf{Z}$，使

$$a=bq$$

成立，则称（在 Z 上）b 整除 a，记作 $b\backslash a$，否则就说（在 Z 上）b 不整除 a。当 $b\backslash a$ 时就说 b 是 a 的约数或说 b 是 a 的因数，a 是 b

的倍数。

整除是个基本概念，它有下列一些熟知的重要性质：

1）若 $a\backslash b$，$b\backslash c$ 则 $a\backslash c$，这叫整除的传递性；

2）$a\backslash b$ 又 $b\backslash a$ 当且仅当 $b=\pm a$；

3）若 $a\backslash b$，$a\backslash c$ 则 $a\backslash(b\pm c)$；

4）若 $a\backslash b$ 或 $a\backslash c$ 则 $a\backslash bc$；

5）设 a 为一确定的整数，x 为任意的整数。那么 $a\backslash x$ 当且仅当 $a=\pm 1$；$x\backslash a$ 当且仅当 $a=0$。

这些性质都是容易验证的。我们只证明2）与5）这两条的正确性，其它三条的证明做为练习留给读者。

事实上由 $a\backslash b$ 又 $b\backslash a$ 则有 q_1，$q_2\in\mathbf{Z}$ 使

$$b=aq_1,\quad a=bq_2$$

于是

$$b=bq_2q_1。$$

如果 $b=0$ 那么显然也有 $a=0$；如果 $b\neq 0$ 那么可得 $q_2q_1=1$，因为 q_1，q_2 都是整数，从而必有 $q_1=q_2=1$ 或 $q_1=q_2=-1$。这就得到 $b=\pm a$。反之，如果 $b=\pm a$，那么就有 $a=\pm b$。这就说明 $a\backslash b$ 又 $b\backslash a$，性质2）被证明了。

再者，如果 $a=\pm 1$，那么对任一整数 x 显然都有 $a\backslash x$。反之，如果对任一整数 x 都有 $a\backslash x$，那么特别地取 $x=1$，当然也有 $a\backslash 1$，即 $1=aq$，从而必有 $a=\pm 1$。这样性质5）得到证明。

下面来说明公约数、最大公约数这两个概念。

如果 c 是 a 的约数也是 b 的约数，则称 c 是 a 与 b 的公约数。

设 a，b 是不全为零的两个整数。于是在 a 与 b 的公约数中必有绝对值为最大的，称其为 a 与 b 的最大公约数，简称为 a 与 b 的大公约。例如

4与6的全体公约数是1，-1，2，-2，于是4与6的大公约为2和-2；-4与-6的全体公约数也是1，-1，2，-2，因此-4

与-6的大公约也是2和-2。再如3与8的全体公约数只有1，-1这两个数，这样1和-1就是3与8的大公约。

一般地，如果a与b的大公约是± 1，就说a与b**互质或互素**。比如3与8互质、4与9也互质。

如上所见，a与b的大公约是绝对值相同的两个数，当中非负的那一个记作(a, b)。例如$(4, 6)=2$，$(-4, -6)=2$，$(3, 8)=1$，$(4, 9)=1$。

如前所述，由于整数集不能进行除法，就使得在两个整数之间有了整除与不整除这种差别。现在我们把任二整数a与b $(\neq 0)$用统一的形式联系起来，使得整除关系是这种统一联系的一种特殊情形。这就是有名的

定理1　（带余除法）设a，b为任二整数，但$b\neq 0$。那么存在两个整数q，r使

$$a=bq+r \tag{2}$$

成立，其中$0\leqslant r<|b|$。并且使（2）式成立的q，r只有一对。

例如$a=20$，$b=3$时则有$q=6$，$r=2$使$20=3\cdot 6+2$；$a=20$，$b=-3$时则有$q=-6$，$r=2$使$20=(-3)(-6)+2$；$a=-18$，$b=-3$时则有$q=6$，$r=0$使$-18=(-3)6$。

下面给出定理1的证明。

由于$a=bq+r$成立当且仅当$a=(-b)(-q)+r$成立，因此我们可以仅就b是正整数的情形证明定理1。我们考虑b的一切倍数：

$$\cdots,\ -3b,\ -2b,\ -b,\ 0,\ b,\ 2b,\ 3b,\ \cdots.$$

于是只有两种可能，即

1）a恰好是b的某一个倍数，即有$q\in Z$使$a=bq$，这就说明存在整数q，$r=0$使（2）式成立。

2）a不是b的一个倍数，因而a必在b的两个相邻倍数之间，即有$q\in Z$使$bq<a<b(q+1)$，换个写法就有

$$a=bq+r，其中0<r<b.$$

把以上两种可能的情形合起来写就有

$$a=bq+r,\ \text{其中}0\leqslant r<b.$$

这样定理 1 的前一部分得到了证明。

现在再来指出 q， r 的唯一性，即若还有 q'，r' 也使

$$a=bq'+r',\ \text{其中}0\leqslant r'<b$$

成立，那么必有 $q=q'$，$r=r'$。

事实上由

$$a=bq+r \text{ 又 } a=bq'+r'$$

则有 $r-r'=b(q'-q)$，这表明 b 整除 $r-r'$。但是，$|r-r'|<b$，从而必须 $r-r'=0$，即 $r=r'$。由此又有 $b(q'-q)=0$，而 $b\neq 0$ 所以 $q'-q=0$，即 $q=q'$。这样定理 1 被完全证明了。

我们称满足（2）式的 q 与 r 为 b 除 a 的商与余数。

显然当 $b\neq 0$ 时，$b\backslash a$ 当且仅当 b 除 a 的余数等于 0。

利用带余除法可以得到求大公约的方法。因为（2）式告诉我们 a，b 与 b，r 有相同的公约数从而也有相同的大公约。同理对 b，r 用带余除法写出

$$b=rq_1+r_1$$

于是 b，r 与 r，r_1 有相同的公约数，也有相同的大公约。如此继续做下去便可求出 a 与 b 的大公约。这就是下述的

定理 2 （辗转相除法）设 a，b 为任二整数，但 $b>0$。反复用带余除法可得下列有限个等式

$$\begin{aligned}
&a=bq_1+r_1,\ 0<r_1<b\\
&b=r_1q_2+r_2,\ 0<r_2<r_1\\
&r_1=r_2q_3+r_3,\ 0<r_3<r_2\\
&\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\
&r_{k-3}=r_{k-2}q_{k-1}+r_{k-1},\ 0<r_{k-1}<r_{k-2}\\
&r_{k-2}=r_{k-1}q_k+r_k,\ 0<r_k<r_{k-1}\\
&r_{k-1}=r_kq_{k+1}.\ (r_{k+1}=0)
\end{aligned}\tag{3}$$

那么 $r_k=(a,\ b)$。

证 从（3）中各等式可得

$(a, b)=(b, r_1)=(r_1, r_2)=\cdots=(r_{k-3}, r_{k-2})=(r_{k-2}, r_{k-1})=(r_{k-1}, r_k)$，又从（3）中最后一个等式，特别地得出$(r_{k-1}, r_k)=r_k$，于是便得 $r_k=(a, b)$。证完。

利用（3）中各等式可以把 a，b 与其大公约用等式联结起来。即有

定理 3 设$(a, b)=d$。那么存在整数 u，v 使$au+bv=d$。

证 由（3）中倒数第二个式子有

$$r_{k-1}(-q_k)+r_{k-2}=r_k.$$

这说明 r_k，即 a 与 b 的大公约 d，被表成 r_{k-1} 与 r_{k-2} 的倍数和。接着用（3）中倒数第三个等式中的 $r_{k-1}=r_{k-2}(-q_{k-1})+r_{k-3}$ 代替上式中的r_{k-1}，经整理即有

$$r_{k-2}(1+q_{k-1}q_k)+r_{k-3}(-q_k)=r_k.$$

如此继续做下去，到第 $k-2$ 步时可得

$$r_2u_{k-2}+r_1v_{k-2}=r_k.$$

其中 u_{k-2}，v_{k-2} 都是整数。接下去再用 $r_2=b-r_1q_2$ 代入上式中的r_2，则有

$$(b-r_1q_2)u_{k-2}+r_1v_{k-2}=r_k$$

经整理即有

$$r_1(v_{k-2}-q_2u_{k-2})+bu_{k-2}=r_k,$$

最后再用 $r_1=a-bq_1$ 代入上式中的 r_1，则有

$$(a-bq_1)(v_{k-2}-q_2u_{k-2})+bu_{k-2}=r_k$$

经整理即得

$$au+bv=r_k$$

其中 u，v 都是整数。定理证完。

定理 4 设d是 a 与 b 的一个公约数。那么 d 是 a 与 b 的大公约的充分必要条件是 a 与 b 的任意一个公约数 c 都是 d 的约数。

证 充分性是明显的。下面证明必要性。设 d 是 a 与 b 的大公约，c 是a与b的任意一个公约数。于是由定理 3，存在整数 u,v 使

$$au+bv=d,$$

这样由 $c\backslash a$，$c\backslash b$ 便得 $c\backslash d$。定理证完。

下面规定 $m(>2)$ 个整数的公约数、最大公约数的意义来结束这一节。

设 a_1，a_2，…，$a_m\in Z$，如果 $c\backslash a_1$，$c\backslash a_2$，…，$c\backslash a_m$ 则称 c 是 a_1，a_2，…，a_m的一个公约数。当$a_1,a_2,\cdots,a_m$不全为 0 时，在它们的公约数当中一定有绝对值为最大者，称其为 a_1，a_2，…，a_m 的最大公约数，把那个非负的记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$。如果 a_1，a_2，…，a_m 的最大公约数等于 ±1，即$(a_1, a_2, \cdots, a_m)=1$，则称 a_1，a_2，…，a_m互质。例如$(4, 6, 9)=1$，即 4，6，9 是互质的。

定理 5 设 a_1，$a_2,\cdots,a_m$ 是不全为 0 的整数，d是它们的一个公约数，那么 d 是 a_1，a_2，…，a_m 的最大公约数的充分必要条件为 a_1，a_2，…，a_m 的任意一个公约数 c 都是 d 的约数。

证 这是一个与自然数 $m\geqslant2$ 有关的命题，我们用第二数学归纳法来做证明。

1）当 $m=2$ 时，由定理 4，命题成立。

2）假设对于$\leqslant k$ 的一切自然数m命题成立，看 $m=k+1$的情形。这时命题的充分性是显然的，下面去证必要性。为此令
$d'=((a_1, \cdots, a_r), (a_{r+1}, \cdots, a_{k+1}))$*

首先明显可见，d'是a_1，$a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的一个公约数。其次对于 a_1，a_2，…，a_{k+1} 的任意一个公约数 c，自然的，c 也是 a_1，a_2，…，a_r 的一个公约数，由归纳假设可知，$c\backslash(a_1, a_2, \cdots, a_r)$；同理 $c\backslash(a_{r+1}, \cdots, a_{k+1})$。这表明 c 是 $(a_1, a_2, \cdots, a_r)$与 $(a_{r+1}, \cdots, a_{k+1})$的一个公约数，因而由定理 4，$c\backslash((a_1,\cdots,a_r),(a_{r+1}, \cdots, a_{k+1}))$，即$c\backslash d'$。这说明 d'是a_1，$a_2,\cdots,a_{k+1}$ 的一个最大公约数，从而也有 $c\backslash d$。定理证完。

推论 $((a_1, \cdots, a_r), (a_{r+1}, \cdots, a_m))=(a_1, a_2, \cdots, a_m)$。

在定理 5 的证明过程中已经说明这个推论的正确性，它同时指

---

* 当$r=1$或$r=k$时，我们认为$(a_1)=a_1$，$(a_{k+1})=a_{k+1}$。

出 a_1，a_2，…，a_m 的最大公约数的具体求法.

定理 6 若$(a_1, a_2, \cdots, a_m)=d$，那么存在整数 u_1，u_2，…，u_m 使 $a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m=d$.

证 用数学归纳法，即

1）当 $m=2$ 时，由定理 3 可知结论成立.

2）假设当 $m=k$ 时结论成立，看 $m=k+1$ 的情形. 于是由定理 5 的推论，则有

$$d=(a_1, \cdots, a_k, a_{k+1})=((a_1,\cdots,a_k), a_{k+1}).$$

令$(a_1, \cdots, a_k)=d_1$，由归纳假设，存在 u'_1，…，u'_k 使

$$a_1u'_1+\cdots+a_ku'_k=d_1.$$

而$(d_1, a_{k+1})=d$，由定理 3，存在 u，v 使

$$d_1u+a_{k+1}v=d.$$

于是

$$\begin{aligned}d&=d_1u+a_{k+1}v\\&=(a_1u'_1+\cdots+a_ku'_k)u+a_{k+1}v\\&=a_1u_1+\cdots+a_ku_k+a_{k+1}u_{k+1},\end{aligned}$$

其中 $u_1=u'_1u$，…，$u_k=u'_ku$，$u_{k+1}=v$ 都是整数. 这就证明了定理 6.

定理 7 $(a_1, a_2,\cdots, a_m)=1$当且仅当存在整数$u_1,u_2,\cdots,u_m$ 使 $a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_mu_m=1$.

证 充分性是明显的，而必要性则是定理 6 的特例. 证完.

例 1 求 1978 与13975的最大公约数 d 及整数 u，v 使$1978u+13975v=d$.

解 用辗转相除法：

$$\begin{aligned}13975&=1978\cdot7+129\\1978&=129\cdot15+43\\129&=43\cdot3\end{aligned}$$

因此(1978，13975)=43. 于是由

$$43=129\cdot(-15)+1978$$

$$129 = 1978\cdot(-7) + 13975$$

则有

$$\begin{aligned}43 &= (1978\cdot(-7) + 13975)\cdot(-15) + 1978\\ &= 1978[(-7)(-15) + 1] + 13975\cdot(-15)\\ &= 1978\cdot 106 + 13975\cdot(-15).\end{aligned}$$

即 $u = 106$，$v = -15$。

例 2　设 $(a, b) = 1$。那么

1）若 $a\backslash c$，$b\backslash c$ 则 $ab\backslash c$；

2）若 $a\backslash bc$ 则 $a\backslash c$。

解　由 $(a, b) = 1$ 可以写出

$$au + bv = 1 \text{及} acu + bcv = c.$$

由 $a\backslash c$，$b\backslash c$ 可知 $ab\backslash ac$，$ab\backslash bc$，从而 $ab\backslash c$，所以 1）成立。

由 $(a, b) = 1$ 写出 $au + bv = 1$ 及 $auc + bcv = c$，于是 $a\backslash auc$，$a\backslash bcv$，从而 $a\backslash c$。即 2）成立。

练　习　二

1．求 a 与 b 的大公约：

1）$a = 3468$，$b = -595$；

2）$a = 110143$，$b = 70091$。

2．求整数 u，v 使 $(135, 243) = 135u + 243v$。

3．设 c 是正整数．试证：$(ca, cb) = c(a, b)$。

4．设 $a = da_1$，$b = db_1$．试证：$(a, b) = d$ 当且仅当 $(a_1, b_1) = 1$。

§3　因数分解定理

我们从大家都有所了解的因数分解定理说起。

因数分解定理　每一个大于 1 的整数 m 都能写成（分解成）以下的形式：

$$m=p_1p_2\cdots p_r$$

其中p_i($i=1$，2，…，r)都是质数，并且这种分解还是唯一的，即如果还有分解式

$m=q_1q_2\cdots q_s$，此中 q_j($j=1$，2，…，s) 都是质数，那么

1．$r=s$；

2．可以适当调换q_1，q_2，…，q_r的顺序，使

$$p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ \cdots,\ p_r=q_r.$$

例如$m=30$，那么30可以分解成

$$30=2\cdot3\cdot5$$

其中2，3，5都是质数．而且这种分解是唯一的，即30只能分成三个质数的积，并且这三个质数一定是2，3，5，顶多在积的写法上2，3，5的顺序有所不同，如$30=2\cdot3\cdot5=2\cdot5\cdot3=3\cdot2\cdot5=3\cdot5\cdot2=5\cdot2\cdot3=5\cdot3\cdot2$等。

结合这个定理的内容我们先说明两个问题：质数与合数及定理的证明方法。

我们已经知道在正整数

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16，17，…当中

2，3，5，7，11，13，17，…是质数；

4，6，8，9，10，12，14，15，16，…是合数。

这里应该明确质数与合数各自的特性以及二者的区别．为此考虑，对任意的整数a，都有

$$1\backslash a,\ a\backslash a$$

即a必有约数1与a。例如

2必有约数1与2，3必有约数1与3，5必有约数1与5等等。再如

4必有约数1与4，6必有约数1与6，8必有约数1与8等等。

但不难看出在上述两种例子中有着明显的原则性差别，这就是

对于质数 2，3，5 来说除了 1 与其本身之外再没有别的正约数，而对于合数 4，6，8 来说除了 1 与本身这样的约数还有别的正约数。例如，4 除了 1 与 4 还有正约数2，6除了 1 与 6 还有正约数2和3，8 除了 1 与 8 还有正约数 2 和 4 。这样，我们就明确了质数与合数的区别。一般的说法就是：

设m为大于1 的整数。如果除了 1 与m本身之外，m再没有其它的正约数则称m为质数或素数；如果除了 1 与m本身，m还有其它的正约数则称m为合数。为了说话方便，m的不同于 1 与m本身的正约数叫做m的真约数。于是，$m(>1)$ 是质数当且仅当m没有真约数，m是合数当且仅当m有真约数；m是合数当且仅当$m=m_1m_2$，其中$1<m_1$，$m_2<m$。

现在对因数分解定理的证明再说几句。明显可见，须要证明的有两点：一是分解的可能性，即任一大于 1 的整数m都能分解成质因数的乘积；再就是这种分解的唯一性。为此我们需要质数的相应的两条基本性质，即

1．任一大于 1 的整数 m，只有有限个质约数；

2．若 p 为质数且$p\backslash ab$，则必有 $p\backslash a$或$p\backslash b$。

事实上，如果 p 是m的质约数则 $1<p\leqslant m$。因为不大于m的正整数恰有m个，所以m的质约数少于m个。再有假设质数 $p\backslash ab$ 而p不整除a。由于质数 p 只有 1 与 p 这两个正约数，从而 p 与 a 的大公约不是 p 就是 1 。因为p不整除a所以 p 与 a 的大公约不是 p 。这样，p 与 a 互质，存在整数u，v使$pu+av=1$，于是 $pub+abv=b$。由此即得$p\backslash b$。

有了以上说明，下面给出因数分解定理的具体证明。显然这是一个与大于 1 的自然数有关的命题，我们用第二数学归纳法先证明分解的可能性。

1．当 $m=2$ 时，结论自然成立。

2．假设对任意的k：$1<k<m$，结论都成立，看 $k=m$ 的情形。如果m是质数结论自然成立；如果m是合数，则有 $m=k_1k_2$，其中

$1<k_1$，$k_2<m$。于是由归纳假设，k_1，k_2 有分解式：

$$k_1=p_1\cdots p_t, \quad k_2=p_{t+1}\cdots p_r,$$

其中 p_1，…，p_t，p_{t+1}，…，p_r 都是质数。由此即得分解式：$m=p_1\cdots p_t p_{t+1}\cdots p_r$。

再用第二数学归纳法去证明分解式的唯一性。

1．当 $m=2$ 时，结论自然成立。

2．假设对任意的 k：$1<k<m$，结论都成立，看 $k=m$ 的情形。如果m是质数，结论自然成立；如果m是合数，而且还有分解式

$$m=q_1q_2\cdots q_s，其中\ q_1，q_2，\cdots，q_s\ 都是质数。$$

那么

$$p_1p_2\cdots p_r=q_1q_2\cdots q_s,$$

这表明$p_1\backslash q_1q_2\cdots q_s$。因为 p_1 是质数，所以p_1 必能整除q_1，q_2，…，q_s当中的某一个，不妨认为$p_1\backslash q_1$。又因 q_1 也是质数，所以$p_1=q_1$。于是从等式

$$p_1p_2\cdots p_r=p_1q_2\cdots q_s$$

两端消去 p_1，即有

$$m'=p_2\cdots p_r=q_2\cdots q_s, \quad 1<m'<m.$$

上式可以看成是 m' 的两个分解式，于是由归纳假设即得：$r-1=s-1$，即$r=s$；适当调换q_2，…，q_s的顺序，有$p_2=q_2$，…，$p_r=q_r$。总之就得到

$$r=s;\ p_1=q_1,\ p_2=q_2,\ \cdots,\ p_r=q_r.$$

定理证明完了。

最后利用质约数分解式来说明几个问题。在m的质约数分解式中，把相同的质约数都集中起来写成一个幂的形式，这样便有

$$m=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_r^{l_r}$$

其中 p_1，p_2，…，p_r 是两两不同的质数，l_1，l_2，…，l_r 都是正整数。我们称这样的分解式为m的标准分解式。有时为了方便，不必限定指数 l_i 必须是正整数，只要 $l_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,r)$ 就行。我们

把这样的分解式叫做m的一般标准分解式。这时如果指数 $l_i=0$，说明p_i不是m的约数。例如，$m=60$，那么$60=2^2\cdot3\cdot5$是标准分解式；$60=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^0$则是60的一般标准分解式，但7不是60的质约数。

设

$$a=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_r^{l_r},$$
$$b=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r},$$
$$d=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r},$$

分别是a，b，d的一般标准分解式。

（1）$d\backslash a$ 当且仅当 $0\leqslant t_i\leqslant l_i$，$i=1, 2, \cdots, r$。

（2）d是a与b的公约数当且仅当 $0\leqslant t_i\leqslant l_i$，$0\leqslant t_i\leqslant s_i$，$i=1, 2, \cdots, r$。

（3）d是a与b的大公约当且仅当t_i等于l_i与s_i当中较小的，一般记作$t_i=\min(l_i, s_i)$，$i=1, 2, \cdots, r$。例如，$a=360$，$b=525$，求(a, b)。因为$360=2^3\cdot3^2\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7^0$，$525=3\cdot5^2\cdot7=2^0\cdot3\cdot5^2\cdot7$，所以$(360, 525)=2^0\cdot3\cdot5\cdot7^0=15$。

练　习　三

1．若$(a, b)=1$则$(a+b, ab)=1$。

2．若$(a, b)=1$，c为任一整数则$(ac, b)=(c, b)$。

3．设p为大于1的整数，a，b为任意整数。如果由$p\backslash ab$必有$p\backslash a$或$p\backslash b$，那么p一定是质数。

4．a，b为正整数，如果$a^2\backslash b^2$则$a\backslash b$。

§4　数　　域

本节给出数域的概念，另外讲一下复数的比较大小问题。

我们考虑Q，D，C这三个数集，即有理数集，实数集，复数

集．大家知道，这三个数集都能进行加、减、乘、除四种运算．在高等代数里用到的主要是能进行四则运算的数集，因此把具有这样特性的数集突出出来给予专门的名称是必要的．于是便有

定义 设F是一数集，其中有不等于零的数．如果在F里能进行加、减、乘、除四则运算，则称F是一个数域．

按此定义，Q，D，C都是数域，分别叫有理数域，实数域，复数域．而N，Z不是数域，Z是数环．再如数集

$$F=\{a+b\sqrt{2}\mid \forall a,\ b\in Q\}$$

是一个数域．

事实上，F中含有不等于0的数，比如当$a=0$，$b=1$时，$a+b\sqrt{2}=\sqrt{2}\in F$．下面我们验证$F$能进行四则运算．为此考虑$F$里的任意两个数：

$$\alpha=a+b\sqrt{2}\ ,\ \beta=c+d\sqrt{2}，其中\ a,\ b,\ c,\ d\in Q$$

于是

$$\alpha\pm\beta=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\ ,$$

$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\ .$$

因为$a\pm c$，$b\pm d$，$ac+2bd$，$ad+bc$还都是有理数，所以$\alpha\pm\beta\in F$，$\alpha\beta\in F$，即F能进行加、减、乘三种运算．再有当$\beta\neq 0$时，即c与d不同时为0，则有

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(a+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}$$

因为$\dfrac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$，$\dfrac{bc-ad}{c^2-2d^2}$都还是有理数，所以$\dfrac{\alpha}{\beta}\in F$，即$F$能进行除法．总之，$F$能进行四则运算，因而$F$是一个数域．

有一个问题很值得我们注意．如果已知a是数集F里的数，由此我们并不能推断出F当中还含有哪些数，其实F也不必再含有a以外的什么数．但是，如果F不是一般的数集，而是数环或者还是数

域，情况就大不一样了．当 a 是数环 F 中的一个数时，我们可以断言 $a+a$，$a-a$，$a\cdot a$ 都必定在数环 F 之中；如果 F 还是数域的话，当 $a\neq 0$ 时，$\frac{a}{a}$ 也必定在 F 之中．这是数环，数域与一般数集的重要差别，即数环，数域当中的数不是孤立的，而是用一定的运算联系着．特别地，任一数环必含有 0；任一数域必含 0 与 1．一般地，我们容易证明以下的

命题　任一数域 F 当中必含有一切有理数，换句话说，有理数域是最小的数域。

证　设 F 是一个数域．由定义 F 当中含有不等零的数，任取其一设为 a．于是 $a-a=0\in F$．$\frac{a}{a}=1\in F$．进而，由 1 通过加法可以得出一切正整数；再由 0 与任一正整数相减就得出一切负整数．这样，一切整数都含于 F 之中．最后，通过除法，由一切整数就得出任意的有理数，即一切有理数都含在数域 F 之中。证完。

下面为了澄清问题，讨论一下复数的比较大小问题。

我们已知，对实数集 D 的任一子集M来说，M中的数都能比较大小，即

1）对 M 中任意两个数 a 与 b 都使

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a$$

三者有且只有一种关系成立，

2）若 $a<b$，$b<c$ 则 $a<c$，$\forall a, b, c\in M$．

对数集 M 做这种考虑时就称 M 是有序数集。

对于能够进行运算的有序数集M，常常把数之间的大小关系与运算联系起来．比如，对有理数域 Q，实数域 D 来说，其中数之间的大小关系与加法，乘法运算联系起来时就有以下的一般规律：

3）若 $a<b$ 则 $a+c<b+c$，

4）若 $a<b$，$0<c$ 则，$ac<bc$，**这时我们把 Q，D 叫做有序数域。**

一般的，一个数域F对于某一种也叫做“小于”的关系“$<$”满足以上四个条件1）～4）时，就说F是一个有序数域．按照这样约定的名称 N，Z，Q，D 对于通常的小于关系来说，都是有序数集，而Q，D都是有序数域．

下而来考查复数域C．首先我们可以在两个复数之间规定一种“小于”关系，也用记号“$<$”来表示．对于关系“$<$”来说C是有序数集．

设$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$为任二复数．我们规定：

$\alpha<\beta$当且仅当$a<c$或$a=c$时$b<d$．

于是易知上述的条件1）与2）成立，即

1）$\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$，$\beta<\alpha$

三者有且只有一种关系成立．

2）若$\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$则$\alpha<\gamma$．

因此在考虑这个小于关系时，复数集C做成一个有序数集．但是与Q，D截然不同，绝无办法使C做成有序数域．我们用反证法来论证这个结论的正确性．

事实上，假设用符号$<$表示在复数之间规定的一个小于关系，它使C做成有序数域，我们将推出矛盾来．

考虑0，i这两个不同的复数．由条件1），必有$0<i$或$i<0$．

首先，如果$0<i$，利用有序数域的第四个条件，则有

$0\cdot i<i\cdot i$ 即 $0<-1$．

再用一次第四个条件，则有

$0\cdot(-1)<(-1)(-1)$即$0<1$．

于是在$0<-1$两边同时加1，由条件3）使得

$0+1<(-1)+1$，即$1<0$．

这样就有$0<1$及$1<0$同时成立，这与条件 1）相矛盾，故而不能有$0<i$．

同理可证 $i<0$ 也是不可能的．

上述结果表明，假设小于关系$<$使C做成有序数域，可是对0

与 i 这两个具体的复数来说

$$0<i,\ 0=i,\ i<0$$

没有一个能成立，这个矛盾断定，根本不可能有小于关系<使 C 做成有序数域。

我们的结论是：笼统的说复数不能比较大小是不妥的；正确的说法是，不与复数的加法和乘法相联系，复数象通常一样可以比较大小，即复数集 C 可以做成有序数集；如果把复数之间的大小关系与复数加法，乘法联系起来考虑，复数就不能象通常那样比较大小，即复数集 C 不能做成有序数域。

练 习 四

1. 验证下列数集是数域：

1）$F_1=\{a+b\sqrt{3}\mid \forall a,\ b\in Q\}$，

2）$F_2=\{a+bi\mid \forall a,\ b\in Q\}$。

2. 说明可用不同的大小关系使复数集 C 做成有序数集。

3. 设 F 是一数域，$D\subset F$。证明：$F=C$。

习 题 一

1. 不等式 $2^n>n^2$ 对哪些自然数 n 成立？

2. 设 h 是一个正数，n 是正整数。证明：$(1+h)^n\geqslant 1+nh$。

3. 证明：含有 n 个元素的集合的一切子集的个数等于 2^n。

4. 设 a，b，m 都是正整数。证明：$(a^m,\ b^m)=(a,\ b)^m$。

5. 证明：相邻二整数必互质。

6. 证明：质数有无限多个。

7. 若 p 是质数，那么 $\sqrt{p}$ 不是有理数。

8. 下列数集哪些是数环？哪些是数域？

1）$F_1=\left\{\dfrac{a}{b}\,\middle|\,(a,\ b)=1,\ a\text{为偶数},\ b\text{为奇数}\right\}$。

2）$F_2=\{a+b\sqrt{-2}\mid a,\ b\in Q\}$，

3）$F_3=\{a+bi\mid a,\ b\in Z\}$

4）$F_4=\{\frac{m}{2^n}\mid m,\ n\in Z\}$。

9．设 F_1 与 F_2 都是数域，试证

$F=\{k\mid k\in F_1$ 与 $k\in F_2\}$。

也是数域。

10．试述在有理数域与实数域之间有无限多个不同的数域。

第二章　一元多项式

代数式是中学数学的基本和重要的组成部分，它的基础是多项式，而多项式是高等代数课程的最基本的对象之一，并且在进一步学习代数和其它数学课程时也会经常涉及到。本章将讨论多项式的概念、整除理论和求根问题。

§1　一元多项式的定义及运算

在多项式的讨论中，我们总是以一个予先给定的数域F作为基础，用文字x代表一个可运算的符号（或称为未定元），首先我们明确地给出一元多项式的定义及有关的一些概念，这是本章的基本概念，在以下的讨论中要经常用到。

定义1　形式表达式

$$a_0x^0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n \qquad (1)$$

叫做数域F上的一个一元多项式，其中n为非负整数，a_0，a_1，a_2，$\cdots$，a_{n-1}，a_n是F中的数。

今后，（1）式就简称为多项式。在多项式（1）中，a_ix^i称为i次项，a_i称为i次项的系数，a_0x^0称为常数项，当$a_n\neq0$时，a_nx^n称为首项，此时把n叫做多项式（1）的次数，称（1）为n次多项式，各项系数全为零的多项式叫零多项式，记为0，对这样的多项式我们不规定次数。

为了书写方便，我们约定：

（1）系数是零的项可以省略不写，这样自然也可以添上一些系数是零的项；

（2）系数是1的项可以把系数1省略不写；

（3）$x^0=1$，因此常数项 a_0x^0 就可简写为 a_0。

以后用$f(x)$，$g(x)$，…或$f,g,\cdots$等表示多项式。

例如多项式

$$f(x)=2x^0+0x+1\cdot x^2+4x^3$$

可以写成

$$f(x)=2+x^2+4x^3+0x^4$$

也可以写成

$$f(x)=2+x^2+4x^3.$$

根据次数的定义，这个多项式的次数是3，即$f(x)$是一个3次多项式。

定义2 两个多项式$f(x)$与$g(x)$，如果它们同次项的系数全相等，则称$f(x)$与$g(x)$是相等的，或$f(x)$等于$g(x)$，记作

$$f(x)=g(x).$$

按此定义，相等的两个多项式必定是同次的，因而次数不同的二多项式必定不会相等。

其次我们来定义多项式的加法和乘法。

设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \qquad (2)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m \qquad (3)$$

是两个多项式，不妨假定$n\leqslant m$。

定义3 多项式

$h(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots+b_mx^m$，称为$f(x)$与$g(x)$的和，记为$h(x)=f(x)+g(x)$，求两个多项式的和的方法叫做加法。

定义4 多项式

$k(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots+a_nb_mx^{n+m}$，称为$f(x)$与$g(x)$的积，记为 $k(x)=f(x)\,g(x)$，求两个多项式的积的方法叫做乘法。

多项式的加法与乘法适合通常数的运算规律，即

1．加法交换律：

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

2．加法结合律：

$$(f(x)+g(x))+u(x)=f(x)+(g(x)+u(x));$$

3．乘法交换律：

$$f(x)g(x)=g(x)f(x);$$

4．乘法结合律：

$$(f(x)g(x))u(x)=f(x)(g(x)u(x));$$

5．乘法对加法的分配律：

$$f(x)(g(x)+u(x))=f(x)g(x)+f(x)u(x).$$

这些规律都很容易由定义直接验证，下面只给出乘法结合律的证明。

设

$$u(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_tx^t. \tag{4}$$

我们证明

$$(f(x)g(x))u(x)=f(x)(g(x)u(x)).$$

按多项式相等的定义2，只要指出等号两端多项式的同次项的系数全相等即可。

左端 $f(x)g(x)$中 s 次项的系数为

$$a_0b_s+a_1b_{s-1}+\cdots+a_{s-1}b_1+a_sb_0=\sum_{i+j=s}a_ib_j.$$

因之等号左端 t 次项的系数为

$$\sum_{s+k=t}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)c_k=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

右端 $g(x)u(x)$中 r 次项的系数为

$$b_0c_r+b_1c_{r-1}+\cdots+b_{r-1}c_1+b_rc_0=\sum_{j+k=r}b_jc_k.$$

所以等号右端 t 次项的系数为

$$\sum_{i+r=t}a_i\left(\sum_{j+k=r}b_jc_k\right)=\sum_{i+j+k=t}a_ib_jc_k$$

由此可见，左右两端相等。

多项式的运算还有以下一些简单性质：

1）$0+f(x)=f(x)$；$0\cdot f(x)=0$。

2）把 $f(x)$ 的每一项系数都变号所得的多项式记为 $-f(x)$，则有

$$f(x)+(-f(x))=0$$

利用 $-f(x)$ 我们定义减法为

$$f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$$

3）如果 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，则

$$f(x)g(x)\neq 0。$$

1）与 2）都是明显的，下面说明 3）成立。

事实上，假设在 3）中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的首项系数为 a_n，b_m。由此可知，$a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$。所以 $a_nb_m\neq 0$，于是 $f(x)g(x)$ 的首项为 $a_nb_mx^{n+m}$，所以 $f(x)g(x)\neq 0$

由此可得

4）如果 $u(x)\neq 0$，且 $u(x)f(x)=u(x)g(x)$，则

$$f(x)=g(x)。$$

事实上，由 $u(x)f(x)=u(x)g(x)$ 有

$$u(x)(f(x)-g(x))=0。$$

根据性质 3）由 $u(x)\neq 0$，必有 $f(x)-g(x)=0$，即

$$f(x)=g(x)。$$

最后我们指出和与积的次数的一个性质来结束这一节。为了书写方便用 $\deg f(x)$ 表示 $f(x)$ 的次数。

5）$\deg(f(x)\pm g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x))$；

$$\deg f(x)g(x)=\deg f(x)+\deg g(x)。$$

前者由加法与减法定义可直接看出是正确的，后者由性质 3）的说明可以得到验证。

练 习 一

1．证明（1）$\deg(f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_s(x))\leqslant\max$ $[\deg f_1(x),\ \deg f_2(x),\ \cdots,\ \deg f_s(x)]$

（2）$\deg[f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)]=\deg f_1(x)+\deg f_2(x)+\cdots+$ $+\deg f_s(x)$。

2．设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$是实数域上的多项式．证明若是

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$$

那么，$f(x)=g(x)=h(x)=0$。

§ 2　多项式的整除性

——因式、公因式、最高公因式

我们已经知道，一元多项式可作加、减、乘法三种运算．于是自然要想：一元多项式是否也可以作除法呢？除法——做为乘法的逆运算，并不是普遍可行的．由上节两个多项式乘积的次数性质可以看出：若 $f(x)$ 的次数高于 $g(x)$的次数，那么 $f(x)$必定不能“除尽” $g(x)$．因之，整除（除尽）就成为两个多项式之间的一种基本关系．而且可以建立与整数的整除性完全平行的整除理论．本节要讲的整除概念及性质是以后几节的基础，要经常用到．

定义1　**令$f(x)$与$g(x)$是F上的任二多项式，如果存在F上的多项式 $h(x)$使**

$$g(x)=f(x)h(x)$$

就说$f(x)$ 整除$g(x)$，记作 $f(x)|g(x)$．否则就说 $f(x)$ 不能整除 $g(x)$。

当 $f(x)|g(x)$时，称 $f(x)$是$g(x)$的一个因式，而$g(x)$称为 $f(x)$的倍式．

由这个定义，可以直接推出关于整除的一些基本性质：

1．若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$。

事实上，由所给的条件得

$$g(x)=f(x)g_1(x),\quad h(x)=g(x)h_1(x)$$

因此

$$h(x)=f(x)g_1(x)h_1(x)$$

即

$$f(x)\mid h(x).$$

2．$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$当且仅当

$$f(x)=cg(x)$$

其中 c 是 F 中的一个非零常数，换句话说：$f(x)$与$g(x)$只差一个零次因式。

事实上，如果

$$f(x)=cg(x)$$

那么

$$g(x)=c^{-1}f(x)$$

即

$$f(x)\mid g(x),\quad g(x)\mid f(x).$$

反之，若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，有

$$g(x)=f(x)g_1(x)$$

$$f(x)=g(x)f_1(x).$$

于是

$$f(x)=f(x)g_1(x)f_1(x),$$

$$f(x)(1-g_1(x)f_1(x))=0.$$

若 $f(x)\neq 0$，则

$$1-g_1(x)f_1(x)=0$$

$$g_1(x)f_1(x)=1$$

从而

$$\deg g_1(x)+\deg f_1(x)=0$$

由此推得

$$\deg g_1(x)=0,\ \deg f_1(x)=0$$

这就是说 $f_1(x)$ 是一个非零常数 c，于是

$$f(x)=cg(x).$$

若 $f(x)=0$，由题设必有 $g(x)=0$，故

$$f(x)=g(x).$$

3. 若 $h(x)|f(x)$，$h(x)|g(x)$，则$h(x)|f(x)\pm g(x)$。

事实上，由等式

$$f(x)=h(x)f_1(x),\ g(x)=h(x)g_1(x)$$

得

$$f(x)\pm g(x)=h(x)(f_1(x)\pm g_1(x))$$

即

$$h(x)|f(x)\pm g(x)$$

4. 若 $h(x)|f(x)$或者 $h(x)|g(x)$，则

$$h(x)|f(x)g(x).$$

事实上　若 $h(x)|f(x)$ 即

$$f(x)=h(x)f_1(x)$$

那么

$$f(x)g(x)=h(x)f_1(x)g(x)$$

所以

$$h(x)|f(x)g(x).$$

5. 每一多项式都能被任一零次多项式，亦即F中的任一非零常数整除。

事实上　若 c 为F中任意非零常数，则

$$f(x)=c(c^{-1}f(x))$$

即

$$c|f(x).$$

由以上性质可以看出，多项式 $f(x)$ 与它的任一个非零常数倍 $cf(x)$ 有相同的因式，也有相同的倍式。因之，在多项式整除性的讨论中 $f(x)$ 常常也可以用 $cf(x)$来代替。

上述性质与整数的整除性是完全类似的．请读者在学习过程中加以对照比较。

如果 $h(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $g(x)$ 的因式，则称 $h(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$ 的一个公因式．两个多项式 $f(x)$与 $g(x)$的公因式总是存在的，因为至少每一非零常数，即零次多项式都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式．一般说来，$f(x)$与$g(x)$还有其他的公因式．在公因式中占有特殊重要地位的是所谓的最大公因式。

定义 2 **设$d(x)$ 是$f(x)$与$g(x)$的一个公因式，若是 $d(x)$ 能被$f(x)$与$g(x)$的每一个公因式整除，那么$d(x)$叫做$f(x)$与 $g(x)$ 的一个最大公因式或最高公因式。**

例如，对于任意多项式 $f(x)$，$f(x)$ 就是 $f(x)$ 与 0 的一个最大公因式．特别地，两个零多项式的最大公因式就是 0；再有，如果 $g(x)\backslash f(x)$，那么，$g(x)$就是 $f(x)$ 与 $g(x)$的一个最大公因式。

下面先证一个命题，它是下节用辗转相除法求最大公因式的基础。

命题 **若对$f(x)$与$g(x)$有等式**

$$f(x)=g(x)u(x)+h(x), \tag{1}$$

那么，$f(x)$ 与 $g(x)$ 和 $g(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的公因式。

证明　若 $d(x)$是 $g(x)$与 $h(x)$的一个公因式即

$$d(x)|g(x),\ d(x)|h(x),$$

那么，由（1），$d(x)|f(x)$．这就是说：$d(x)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的一个公因式；

反过来，若$d(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的一个公因式，即 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$．那么，由

$$h(x)=f(x)-g(x)u(x).$$

可见$d(x)|h(x)$，这就是说$d(x)$也是$g(x)$与 $h(x)$的一个公因式．因此，$f(x)$，$g(x)$和 $g(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的公因式。

由此可见，如果 $g(x)$与$h(x)$有最大公因式 $d(x)$，那么，$d(x)$也就是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式．于是，若求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公

因式，只须求出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的最大公因式。

由定义不难知道，若 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，那么，$d_1(x)=cd_2(x)$。这样，首系数等于 1 的最大公因式只能有一个。

以上公因式，最大公因式的概念都是对两个多项式来说的，我们可以很自然的把这些概念推广到任意多个多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 的情形。如果 $h(x)$ 是 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 中每一多项式的因式，则称 $h(x)$ 是 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 的一个公因式，特别地，我们把能被 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 中任意公因式整除的公因式叫做 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 的最大公因式。

最后我们给出

定义 3　如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 的最大公因式是零次多项式，即不等于 0 的数，则称多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 是互质的或互素的。

显然，在 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 当中有零次多项式时，这 s 个多项式一定是互质的。再如，这 s 个多项式中有某两个是互质的。那么这 s 个多项式就也是互质的。例如，$x-1$ 与 $x+1$ 是互质的，从而 $x-1$，$x+1$，$(x-1)(x+1)$，这三个多项式也是互质的，但是注意，$x+1$ 与 $(x-1)(x+)$ 不是互质的。

练　习　二

1．证明　若在多项式 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_s(x)$ 中，只有一个多项式 $f_i(x)$（i 是1，2，$\cdots$，s 中的某一数）不能被 $g(x)$ 整除，那么，$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x)$ 一定不能被 $g(x)$ 整除。

2．证明　$x|f^k(x)$ 的充分必要条件是 $x|f(x)$。

3．证明　若 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合式，即存在 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

则 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

§3 带余除法 辗转相除法

本节介绍在多项式整除理论中占有特殊重要地位的带余除法，辗转相除法。带余除法是多项式整除理论的基础，到目前为止，还没有一种办法来判断一个给定的多项式$g(x)$是否能整除另一个多项式 $f(x)$。带余除法就是解决这一问题的一个切实可行的办法。辗转相除法解决了任意两个多项式的最大公因式的存在性，同时提供了求出最大公因式的一个有效办法。

定理1 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是F上的任意两个多项式，并且 $g(x)\neq 0$。那么，可以找到F上的两个多项式 $q(x)$与 $r(x)$ 使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x) \qquad (1)$$

其中或者$r(x)=0$，或者$\deg r(x)<\deg g(x)$。满足以上条件的多项式 $q(x)$与 $r(x)$只有一对。

证明 先证定理的前一部分。

若$f(x)=0$，或 $f(x)$的次数小于$g(x)$的次数，那么可取

$$q(x)=0,\ r(x)=f(x).$$

现在假定 $f(x)$ 的次数不小于 $g(x)$ 的次数。把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 按 x 的降幂写出：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

其中，$a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，并且 $n\geqslant m$。

用首项除首项的方法，即 $f(x)$ 减去 $g(x)$ 与$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$的积。那么，$f(x)$的首项被消去，而我们得到F上的一个多项式 $f_1(x)$：

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x),$$

$f_1(x)$ 有以下性质：或者 $f_1(x)=0$，或者 $\deg f_1(x)<\deg f(x)$。

如果$f_1(x)=0$，或$f_1(x)$的次数<$g(x)$的次数，那么问题得证。此时，$r(x)=f_1(x)$，$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$。

若 $f_1(x)\neq 0$，且 $f_1(x)$ 的次数 n_1 仍不小于 $g(x)$ 的次数m，那么，用同样的步骤我们可以得到F上的一个多项式$f_2(x)$：

$$f_2(x)=f_1(x)-\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)。$$

这里 a_{n_1}是 $f_1(x)$的首项系数。$f_2(x)$ 有以下性质：或者 $f_2(x)=0$，或者 $\deg f_2(x)<\deg f_1(x)$。

这样作下去，由于$f_1(x)$，$f_2(x)$，…的次数是递降的，最后一定可以得到多项式 $f_k(x)$：

$$f_k(x)=f_{k-1}(x)-\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}g(x)$$

而 $f_k(x)=0$ 或 $f_k(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数 m。

总起来，我们得到等式

$$f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)=f_1(x),$$

$$f_1(x)-\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}g(x)=f_2(x),$$

…………………………

$$f_{k-1}(x)-\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}g(x)=f_k(x).$$

把这些等式加起来，移项整理得

$$f(x)=g(x)\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\cdots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}\right)+f_k(x).$$

这样，F上的多项式

$$q(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+\frac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}+\cdots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}$$

与

$$r(x)=f_t(x)$$

满足等式（1），其中或者$r(x)=0$，或者 $\deg r(x)<\deg g(x)$。

其次，证明定理的后一部分。

假定还有另一对多项式$\overline{q}(x)$与$\overline{r}(x)$，使

$$f(x)=g(x)\overline{q}(x)+\overline{r}(x), \qquad (1)'$$

并且或者$\overline{r}(x)=0$，或者 $\deg\overline{r}(x)<\deg g(x)$，那么由等式（1）减去等式（1）′，得

$$g(x)[q(x)-\overline{q}(x)]=\overline{r}(x)-r(x).$$

若$\overline{r}(x)-r(x)\neq 0$，那么$q(x)-\overline{q}(x)$ 也不能等于零，这时等式右端的次数小于$g(x)$的次数，然而等式左端的次数将不小于$g(x)$的次数，这是不可能的。因此，必然有

$$\overline{r}(x)-r(x)=0$$

从而

$$q(x)-\overline{q}(x)=0$$

亦即

$$\overline{r}(x)=r(x),$$

$$\overline{q}(x)=q(x).$$

从上面证明中可以看出：对于已给多项式$f(x)$与$g(x)$，求$q(x)$与$r(x)$的方法就是中学代数中多项式除多项式的方法，这种方法叫做带余除法。多项式 $q(x)$与 $r(x)$分别叫做以 $g(x)$除 $f(x)$所得的商式和余式。

现在很容易判断，一个已给的多项式$g(x)$是否能整除另一多项式 $f(x)$。

若 $g(x)=0$，根据定义，$g(x)$只能整除零多项式。

若 $g(x)\neq 0$，由定理 1 立即得到

推论 $g(x)\mid f(x)$ 当且仅当以$g(x)$ 除$f(x)$所得余式$r(x)=0$。

值得注意的是，带余除法不但给出了判定整除的一个方法，同时还说明了整除性的一个重要属性。

设$\overline{F}$是包含F的一个较大的数域(比如说：F是实数域，而$\overline{F}$是

复数域），此时，F上的多项式$f(x)$与$g(x)$自然也是$\overline{F}$上的多项式．如果看做F上的多项式，$f(x)$能整除$g(x)$，显然把$f(x)$与$g(x)$看做$\overline{F}$上的多项式时，$f(x)$也能整除$g(x)$。反过来，从F上看若$f(x)$不能整除$g(x)$时，那么$f(x)$除$g(x)$所得余式$r(x)\neq 0$，而在$\overline{F}$上看，由余式的唯一性，这个不等于0的$r(x)$也是$f(x)$除$g(x)$的余式．所以，$f(x)$也不能整除$g(x)$。这就说明两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变．

例1　设

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,$$

$$g(x)=x^2-3x+1.$$

求以$g(x)$除$f(x)$的商式和余式．

解　计算格式如下：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +4x^2 & -5x & +6 & x^2-3x+1 \\
\cline{6-6}
2x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+3x+11 \\
\cline{1-5}
 & 3x^3 & +2x^2 & -5x & +6 & \\
 & 3x^3 & -9x^2 & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & & 11x^2 & -8x & +6 & \\
 & & 11x^2 & -33x & +11 & \\
\cline{3-5}
 & & & 25x & -5 &
\end{array}$$

所以，$q(x)=2x^2+3x+11$，$r(x)=25x-5$。由$r(x)\neq 0$，说明$g(x)$不整除$f(x)$。

由上节命题我们知道，若

$$f(x)=g(x)q(x)+h(x)$$

那么，$d(x)$是$g(x)$与$h(x)$的最大公因式当且仅当$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式．这就给我们提供了一个求最大公因式的线索．事实上，对任意给定的两个多项式$f(x)\neq 0$与$g(x)\neq 0$（如果二者有一个为0，那么，另一个就是最大公因式），而且不妨认为$\deg f(x)\geqslant \deg g(x)$。于是，由带余除法，有

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x).$$

这样，由上述命题求$f(x)$与$g(x)$的最大公因式的问题就等于求

$g(x)$与$r_1(x)$的最大公因式的问题，这里$g(x)$与$r_1(x)$的次数相对于原来的$f(x)$与$g(x)$来说，是要低一些的。这样，对$g(x)$与$r_1(x)$做类似的处理，就把问题归结为求次数更低些的一对多项式的最大公因式。如此下去，完全可能求出$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

有了上述想法，我们证明

定理 2　任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$一定有最大公因式，除一个零次因式外，$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是唯一确定的。这就是说：若$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式，那么F中任何非零数c与$d(x)$的乘积都是，而且这样的乘积恰是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

证明　先证明定理的前一部分。

若$f(x)=g(x)=0$，那么如前所知，0就是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

假定$f(x)$与$g(x)$不全等于0，比方说：$g(x)\neq 0$，应用带余除法，以$g(x)$去除$f(x)$，得商式$q_1(x)$及余式$r_1(x)$。如果$r_1(x)\neq 0$，那么，再以$r_1(x)$除$g(x)$，得商式$q_2(x)$及余式$r_2(x)$。如果$r_2(x)\neq 0$，再以$r_2(x)$除$r_1(x)$，如此继续下去。因为余式的次数每次都要降低，所以，作了有限次这种除法之后必然得出这样的余式$r_k(x)$，它整除前一个余式$r_{k-1}(x)$。这样我们得到一串等式：

$$
\begin{aligned}
&f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),\\
&g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),\\
&r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_{k-3}(x)=r_{k-2}(x)q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x),\\
&r_{k-2}(x)=r_{k-1}(x)q_k(x)+r_k(x)\\
&r_{k-1}(x)=r_k(x)q_{k+1}(x)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

由上节命题，$f(x)$，$g(x)$；$g(x)$，$r_1(x)$；$\cdots$；$r_{k-2}(x)$，$r_{k-1}(x)$；$r_{k-1}(x)$，$r_k(x)$，有相同的公因式。因为$r_k(x)|r_{k-1}(x)$，所以$r_k(x)$就是$r_{k-1}(x)$与$r_k(x)$的最大公因式，从而$r_k(x)$也是$f(x)$与

$g(x)$的最大公因式。

定理的后一论断可由最大公因式的定义以及上节整除性质直接推出。

我们不但证明了任意两个多项式都有最大公因式，并且也获得了实际求出这样一个最大公因式的方法。这种方法叫做**辗转相除法**。它显然与对整数所施行的辗转相除法完全平行。

对两个不全为零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，其最大公因式总是一些非零多项式，当中首项系数是1的恰有一个，我们把它记作：$(f(x), g(x))$。如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是零多项式，这时它们的最大公因式就只有一个零多项式。记作 $(0, 0)=0$。

例2 设

$$f(x)=x^4-2x^3-4x^2+4x-3$$

$$g(x)=2x^3-5x^2-4x+3$$

求 $(f(x), g(x))$。

对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 施行辗转相除法，为了避免分数系数，在做除法时，可以用 F 中不为0的常数去乘被除式或除式。而且不仅在每一次除法开始时可以这样做，就是在进行除法过程中也可以这样做。这样做商式自然会受到影响，但每次求得的余式与正确的余式只能差一个零次因式，这对求最大公因式是没有什么关系的。

解 计算格式如下：把 $f(x)$ 先乘以2，再用 $g(x)$ 来除。

$$\begin{array}{r|l}
2x^4-4x^3-8x^2+8x-6 & 2x^3-5x^2-4x+3 \\
\underline{2x^4-5x^3-4x^2+3x} & \overline{x+1} \\
x^3-4x^2+5x-6 &
\end{array}$$

（乘以2）

$$\begin{array}{r}
2x^3-8x^2+10x-12 \\
\underline{2x^3-5x^2-4x+3} \\
-3x^2+14x-15
\end{array}$$

这样得到第一个余式：

$$r_1(x)=-3x^2+14x-15$$

把 $g(x)$ 乘以3，再用 $r_1(x)$ 来除：

$$
\begin{array}{l|l}
6x^3-15x^2-12x+9 & -3x^2+14x-15 \\
\underline{6x^3-28x^2+30x} & \qquad -2x-13 \\
\qquad 13x^2-42x+9 &
\end{array}
$$

（乘以 3 ）

$$
\begin{array}{l}
39x^2-126x+\ \ 27 \\
\underline{39x^2-182x+195} \\
\qquad\quad 56x-168
\end{array}
$$

约去公因数56后，得出第二个余式

$$r_2(x)=x-3$$

再以 $r_2(x)$除 $r_1(x)$：

$$
\begin{array}{l|l}
-3x^2+14x-15 & x-3 \\
\underline{-3x^2+\ \ 9x} & -3x+5 \\
\qquad\quad 5x-15 & \\
\qquad\quad \underline{5x-15} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

即 $r_2(x)|r_1(x)$，所以 $r_2(x)=x-3$就是$f(x)$与 $g(x)$的最大公因式，且首项系数为 1 。故

$$(f(x),\ g(x))=x-3.$$

关于两个多项式的最大公因式，有以下重要定理.

定理 3　若 $d(x)$ 是 F 上多项式 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式．那么可以找到 F 上多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

证明　若 $f(x)=g(x)=0$，那么 $d(x)=0$，这时 F 上任何多项式都可以取作 $u(x)$ 与 $v(x)$。

若 $f(x)$，$g(x)$不都等于零，不妨假设 $g(x)\neq 0$，考察前面的等式组（2），由（2）的倒数第二个等式得

$$r_{k-2}(x)-r_{k-1}(x)q_k(x)=r_k(x)$$

令

$$u_1(x)=1,\ v_1(x)=-q_k(x),$$

那么，上面的等式可以写成

$$r_{k-2}(x)u_1(x)+r_{k-1}(x)v_1(x)=r_k(x). \qquad (3)$$

由（2）的倒数第三个等式得

$$r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)q_{k-1}(x).$$

把 $r_{k-1}(x)$ 的这个表示式代入（3）中，并令

$$u_2(x)=v_1(x),\ v_2(x)=u_1(x)-v_1(x)q_{k-1}(x),$$

我们得到

$$r_{k-3}(x)u_2(x)+r_{k-2}(x)v_2(x)=r_k(x).$$

这样继续往上推导，利用（2）中的等式最后得到

$$f(x)u_k(x)+g(x)v_k(x)=r_k(x).$$

但 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $d(x)$ 等于 F 中不为零的数 c 与 $r_k(x)$ 的乘积：

$$d(x)=cr_k(x)$$

因此，取

$$u(x)=cu_k(x),\ v(x)=cv_k(x)$$

于是，有

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

此定理的证明与整数中关于把最大公约数表为倍数和的证明也是完全平行的。

例 3 设 F 上的多项式

$$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,$$

$$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$$

求 F 上的多项式 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$(f(x),\ g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x).$$

解 对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 施行辗转相除法，因为在求多项式 $u(x)$，$v(x)$ 时，不仅要用到余式，同时也用到商式。所以，对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 施行辗转相除法时，不能象求最大公因式那样用 F 中不为零的数乘被除式或除式。施行除法的结果可得到以下一串等式：

$$f(x)=g(x)\cdot 2x+(-6x^2-3x+9),$$

$$g(x)=(-6x^2-3x+9)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-(x-1),$$

$$-6x^2-3x+9=-(x-1)(6x+9).$$

由此得出

$$(f(x),\ g(x))=x-1,$$

而

$$u(x)=-\frac{1}{3}(x-1),\quad v(x)=\frac{1}{3}(2x^2-2x-3).$$

定理 4 F 上两个多项式 $f(x)$, $g(x)$ 互质的充分必要条件是：存在 F 上两个多项式 $u(x)$, $v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

证明 必要性是定理 3 的直接推论。

充分性：设有 $u(x)$ 与 $v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

令 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，于是

$$d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x)$$

从而

$$d(x)\mid 1$$

故 $d(x)$ 必为非零常数。所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互质。

从这个定理可以推出关于互质多项式如下两个重要性质：

1) 若 $f(x)\mid g(x)h(x)$，且 $(f(x),\ g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$。

事实上 由 $(f(x),\ g(x))=1$，可知有 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

等式两边乘以 $h(x)$，得

$$f(x)u(x)h(x)+g(x)h(x)v(x)=h(x)$$

因为 $f(x)\mid g(x)h(x)$，所以 $f(x)$ 整除等式左端，即 $h(x)$ 也能被 $f(x)$ 整除。

2) 若 $f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$，且 $(f_1(x),\ f_2(x))=1$，则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

事实上，由 $f_1(x)\mid g(x)$ 有

$$g(x)=f_1(x)h_1(x) \tag{4}$$

因为 $f_2(x)\mid g(x)$，亦即 $f_2(x)\mid f_1(x)h_1(x)$，又因为 $(f_1(x), f_2(x))=1$，

由 1）有 $f_2(x)|h_1(x)$即

$$h_1(x)=f_2(x)h_2(x). \tag{5}$$

将（5）代入（4）得

$$g(x)=f_1(x)f_2(x)h_2(x)$$

亦即

$$f_1(x)f_2(x)|g(x).$$

如上所述，利用辗转相除法可以求出两个多项式的最大公因式，那么 s（$s>2$）个多项式的最大公因式是否也可以用辗转相除法来求呢？回答是肯定的．因为我们不难证明：若$d_0(x)$是 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_{s-1}(x)$的一个最大公因式．那么，$d_0(x)$与 $f_s(x)$ 的最大公因式就是$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$的最大公因式．这个证明请读者自己完成．这样，s 个多项式的最大公因式就可以累次应用辗转相除法求出来．

与两个多项式的情形一样，s（$s>2$）个多项式的最大公因式也只有非 0 常数因子的差别．于是，若$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$不都是零多项式，那么它们的最大公因式总是一些非零多项式．我们用

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x))$$

表示首系数为 1 的那个最大公因式．

上面关于两个多项式所证明的定理 3 和定理 4，都可以推广到 s（$s>2$）个多项式的情形．

最后，再明确一个问题．我们已经指出：两个多项式的整除关系不因系数域的扩大而改变．这是因为带余除法中的商式和余式是不随系数域的扩大而改变的．我们知道：最大公因式可以用辗转相除法求出，而辗转相除法就是作一系列的带余除法．因而在辗转相除法中得到的最后那个不为零的余式 $r_k(x)$（它就是最大公因式，而且，每一个最大公因式都是它的非零常数倍）是不随系数域的扩大面改变的，这样，我们就有以下事实：

若$\overline{F}$是一个比 F 大的数域，F 上的两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 也可以看做$\overline{F}$上的多项式．设 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 看做 F 上的多项式

的最大公因式，$\bar{d}(x)$是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 看做$\bar{F}$上的多项式时的最大公因式，那么

$$\bar{d}(x)=\bar{c}\,d(x)$$

其中$\bar{c}$是$\bar{F}$中不为 0 的数，这就说明系数域F扩大到$\bar{F}$时，$f(x)$与$g(x)$的最大公因式没有本质上的改变。这样一来，多项式的互质关系，当然也不会随系数域的扩大而改变。

还应注意一点，例如，有两个多项式

$$f(x)=x^3-3x^2-2x+6,$$

$$g(x)=x^3+x^2-2x-2.$$

这两个多项式既可以看做有理数域上的多项式，又可以看做是实数域上的多项式。不论在哪个数域上看，总有

$$(f(x),\ g(x))=x^2-2.$$

但是，在有理数域上看时，x^2-2没有一次因式，即 $f(x)$与 $g(x)$ 没有一次公因式；而在实数域上看时，显然，$x-\sqrt{2}$，$x+\sqrt{2}$ 都是$f(x)$与 $g(x)$ 的公因式。因此，在系数域扩大后，$f(x)$与 $g(x)$ 获得了原来没有的本质上不同的公因式。

练 习 三

1．求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式．

（1）$f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1$，

$g(x)=x^3+x^2-x-1$．

（2）$f(x)=x^4-4x^3+1$，

$g(x)=x^3-3x^2+1$．

2．求 $u(x)$，$v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),\ g(x)).$$

（1）$f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$；

（2）$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$，

$$g(x)=2x^3-x^2-5x+4;$$

3．$f(x)$，$g(x)$互质的充分必要条件是对任意多项式$\varphi(x)$，都有 $h(x)$，$k(x)$使

$$h(x)f(x)+k(x)g(x)=\varphi(x).$$

4．证明　若 $(f(x),\ g(x))=1$，　则$(f(x^m),\ g(x^m))=1$. $(m\geqslant 1)$.

5．证明　$(f(x)h(x),\ g(x)h(x))=(f(x),\ g(x))h(x)$.

6．证明　若 $(f(x),\ g(x))=1$，$(f(x),\ h(x))=1$则 $(f(x),\ g(x)h(x))=1$.

§4　多项式的因式分解

正如整数可以分解为质数的乘积一样，多项式也可以分解成"质"多项式的乘积．这一节我们就来讨论多项式的因式分解问题．在中学代数里我们学过一些具体的方法，把一个多项式分解为不能再分的因式的乘积．但那里并没有深入地讨论这个问题．那里所谓不能再分，常常只是指我们自己看不出怎样再分下去的意思，并没有严格论证它们确实不能再分．所谓不能再分，其实不是绝对的，而是相对于系数所在的数域而言的．在有理数域上，把 x^4-4 分解为

$$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$$

的形式就不能再分了．但在实数域上，就可以进一步分解成

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)$$

而在复数域上，还可以更进一步分解成

$$x^4-4=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i).$$

可见必须明确系数所在的域后，所谓不能再分才有确切的含义．因此，我们首先应该明确规定不可约多项式这一概念，它相当于整数中的质数．

定义1　令 $f(x)$ 是F上的一个次数$\geqslant 1$的多项式．如果$f(x)$

不能表成（等于）两个次数比它低的F上的多项式的乘积，则称$f(x)$是在F上不可约的；否则，称$f(x)$是在F上可约的。

按照定义，对于零多项式与零次多项式我们既不能说它们是不可约的，也不能说它们是可约的。这些多项式与整数中的零与±1占有相同的地位，因为0与±1既不算是质数，也不算是合数。

显然，按定义，一次多项式是不可约的，正如上面所指出的，x^2-2 在有理数域上是不可约的，而在实数域上就是可约的，这说明多项式的可约性这一概念与以前的整除、最大公因式、互质等概念不同，它是依赖于系数域的，这是必须明确的。

由定义可以明显看出，不可约多项式$p(x)$的因式只有不等于零的数$c(c\neq0)$和它自身与c的乘积$cp(x)(c\neq0)$（这两种因式叫当然因式），此外再没有了。反过来，只有当然因式的次数$\geqslant1$的多项式也一定是不可约的。由此可以看出不可约多项式的一个简单性质：若$p(x)$是不可约的，那么，它与任一多项式$f(x)$只可能有两种关系，或者$p(x)|f(x)$或者$(p(x),f(x))=1$。事实上，若$(p(x),f(x))=d(x)$，那么$d(x)$或者是1或者是$cp(x)$($c\neq0$，且使$cp(x)$的首项系数为1）当$d(x)=cp(x)$时，就有$p(x)|f(x)$。

下面我们证明不可约多项式的一个重要性质。

命题　如果$p(x)$是不可约多项式，那么，对任意两个多项式$f(x)$与$g(x)$的积$f(x)g(x)$，由$p(x)|f(x)g(x)$，一定可以推出$p(x)|f(x)$或者$p(x)|g(x)$。

证明　如果$p(x)|f(x)$，那么结论已经成立。

如果$p(x)$不整除$f(x)$，那么必有$(p(x), f(x))=1$。于是，由上节性质1即得$p(x)|g(x)$。

利用数学归纳法，这个命题可以推广到任意多个多项式的乘积的情形。

推论　设$p(x)$是不可约的，如果$p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$则$p(x)|$某一$f_i(x)$。

由此可以证明这一章的主要定理。

因式分解唯一性定理 F上的每一个$n(n\geqslant 1)$次多项式$f(x)$都可以唯一地分解成F上不可约多项式的乘积。所谓唯一性是说，如果有两个这样的分解式：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$
$$=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

那么必有$s=t$，并且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x)=c_iq_i(x)\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ s,$$

其中$c_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$是$F$里一些不等于零的数。

证明　先证分解式的存在。我们对$f(x)$的次数n作数学归纳法。

当$n=1$时，$f(x)$是不可约的，故定理成立。假设定理的结论对次数低于n的多项式成立。去证对n次多项式$f(x)$分解式是存在的。如果$f(x)$不可约，结论自然成立。若$f(x)$可约，则有

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),$$

其中$f_1(x)$，$f_2(x)$的次数都低于$f(x)$的次数n。由归纳假设，$f_1(x)$与$f_2(x)$都可以分解成F上的不可约多项式的乘积。把这两个乘积乘起来就得到$f(x)$的一个分解式。由第二数学归纳法原理，定理的结论成立，即F上的任何一个次数$\geqslant 1$的多项式都能分解成F上不可约多项式的乘积。

再证唯一性，设

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$
$$=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),\qquad (1)$$

其中$p_i(x)$，$q_j(x)(i=1,2,\cdots,s;\ j=1,\ 2,\cdots,t)$都是不可约的。

我们对$f(x)$的次数n作数学归纳法，显然，当$n=1$时定理结论成立，假设对于次数低于$f(x)$的次数n的多项式唯一性已证。

由（1）有：$p_1(x)|q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，所以由本节命题的推论，$p_1(x)$必整除其中的一个，不妨设

$$p_1(x)|q_1(x),$$

因为$q_1(x)$也是不可约多项式，故有

$$p_1(x)=c_1q_1(x)。$$

于是，把 $p_1(x)=c_1q_1(x)$ 代入（1）式，则有

$$c_1q_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

把上式两边的 $q_1(x)$ 消去，得

$$c_1p_2(x)\cdots p_s(x)=q_2(x)\cdots q_t(x)。\qquad (*)$$

而（*）式中的多项式次数$<n$。所以由归纳法假设，有

$$s-1=t-1，即 s=t，$$

并且适当排列因式的次序之后，有

$$p_i(x)=c_iq_i(x)，(i=2，\cdots，s)。$$

综上所述，即得：

$$s=t 且 p_i(x)=c_iq_i(x)，i=1，2，\cdots，s$$

这就证明了分解的唯一性。

在多项式 $f(x)$ 的分解式中，可以把每一个不可约因式的首项系数提出来，使它们成为首项系数为1的多项式，再把分解式中相同的不可约因式（如果有的话）合并在一起，这样 $f(x)$ 的分解式成为

$$f(x)=a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_r^{m_r}(x),\qquad (2)$$

其中 a_0 是 $f(x)$ 的首项系数，$p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$是不同的首项系数为1的不可约多项式，m_1，m_2，…，m_r是正整数。这种分解式称为**标准分解式**。

最后，利用标准分解式来说明两个问题。

（一）设 $f(x)$ 有标准分解式如（2）：

$$f(x)=a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)。$$

那么多项式 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式当且仅当

$$g(x)=b_0p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_r^{l_r}(x),\qquad (3)$$

其中 b_0 为 $g(x)$ 的首项系数，$0\leqslant l_i\leqslant m_i$，$(i=1，2，\cdots，r)$。

事实上，充分性是明显的，现在假设 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，即

$$f(x)=g(x)h(x)。$$

这样，把 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的分解式结合在一起就是 $f(x)$ 的分解式。由

分解唯一性定理，可知 $g(x)$ 的分解式中不会出现 $p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$ 以外的不可约因式，而且当中含有 $p_i(x)$ 的个数决不会超过 m_i 个，故 $g(x)$必能写成（3）的样子。

（二）如果已知多项式$f(x)$与 $g(x)$的标准分解式，那么可以直接写出它们的最大公因式。

设$f(x)$与$g(x)$的标准分解式中有 t 个相同的不可约因式：

$$f(x)=a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_t^{m_t}(x)\,q_{t+1}^{m_{t+1}}(x)\cdots q_r^{m_r}(x),$$

$$g(x)=b_0p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_t^{n_t}(x)\,\overline{q}_{t+1}^{n_{t+1}}(x)\cdots\overline{q}_s^{n_s}(x),$$

其中每一$q_i(x)(i=t+1,\cdots,r)$不等于任何$\overline{q}_j(x)(j=t+1,\cdots,s)$。令$l_i$是$m_i$与$n_i(i=1,2,\cdots,t)$两个正整数中较小的一个，那么

$$d(x)=p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_t^{l_t}(x)$$

就是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

事实上，$d(x)$显然是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式。若 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一个公因式，那么由前述可知，$d_1(x)$的分解式中既不能出现任何 $q_i(x)$，也不能出现任何$\overline{q}_j(x)$，当中只能含有 $p_i(x)$ 之中的某几个，而且含有 $p_i(x)$ 的个数不能超过 l_i，因此 $d_1(x)|d(x)$，这就说明$d(x)$是 $f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

若是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中没有相同的不可约因式，那么显然是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质。

上述利用标准分解式求因式，最大公因式的方法不能代替带余除法与辗转相除法。因为在一般情况下我们没有实际分解一个多项式为不可约因式的乘积的方法。即使要判断一个多项式是否可约一般都是很困难的。

练 习 四

1．设 $f(x)$ 是 F 上次数≥1的多项式．证明$f(x)$的除零次以外的次数最小的因式必是不可约的。

2．设 $p(x)$ 是数域F上的次数＞0 的多项式，如果对F上的

任意两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，若 $p(x)\mid f(x)g(x)$，则有 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$是 F 上的不可约多项式。

3．证明 若 $(f(x), g(x))=1$，则 $(f(x)g(x), f(x)+g(x))=1$。

§5 重因式

若 $f(x)$有标准分解式为

$$f(x)=a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_r^{m_r}(x),$$

那么可以看出，不可约因式 $p_i(x)$ 在分解式中恰好出现 m_i 次（即分解式中恰好含有 m_i 个 $p_i(x)$）。由此可得 $p_i^{m_i}(x)\mid f(x)$，但是 $p_i^{m_i+1}(x)$ 不整除 $f(x)$，反过来，如果对不可约多项式 $p(x)$，$p^k(x)\mid f(x)$，但是 $p^{k+1}(x)$ 不整除 $f(x)$，那么$p(x)$就恰好在 $f(x)$ 的分解式中出现 k 次。自然的，如果在 $f(x)$ 的分解式中没有重复出现的不可约因式（即每个不可约因式都恰好出现一次），这样的 $f(x)$可以认为是比较简单的。虽然我们没有一般的方法求出一个多项式的标准分解式，但是我们有方法来判断一个多项式的分解式中有没有重复出现的不可约因式及重复的次数，并且在有重复出现的不可约因式的情况下，把这一多项式的研究归结为没有重复出现的不可约因式的多项式的研究。

下面先明确两个概念。

定义1 设 $p(x)$ 为不可约多项式。如果 $p^k(x)\mid f(x)$，而 $p^{k+1}(x)$不整除$f(x)$，则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式。

定义中的 k 可以是任何非负整数。如果 $k=0$，那么 $p(x)$ 根本不是 $f(x)$的不可约因式；如果 $k=1$，则称 $p(x)$是 $f(x)$的单因式；如果$k>1$，则称 $p(x)$是 $f(x)$ 的重因式。称 k 为$p(x)$在 $f(x)$中的重数。

定义2 若

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$$

是F上的多项式。

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

叫做 $f(x)$ 的一阶导式（或导数），特别地，零次多项式及零多项式的导式是零。

自然地，导式的如此定义方法来源于数学分析。在数学分析里，函数的导数概念依赖于实数域的连续性，而一般数域并不具有实数那样的连续性，因此数学分析中的导数定义对于任意数域上的多项式来说不再适用，从而我们有必要如定义 2 那样来定义多项式的导式。不过按数学分析的习惯我们把导式还叫做导数。并且把 $f(x)$的导数 $f'(x)$的导数叫做 $f(x)$的二阶导数，记作 $f''(x)$；$f''(x)$ 的导数叫做 $f(x)$的三阶导数，记作 $f'''(x)$ 等等。在这个意义下 $f'(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一阶导数。一般地，$f(x)$ 的 k 阶导数也记作 $f^{(k)}(x)$。

根据以上定义不难证明，熟知的关于和与积的导数公式仍然成立：

$$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x). \tag{1}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x). \tag{2}$$

（1）与（2）式不难推广到任意个多项式的情形。

特别地以下等式成立：

$$[f^k(x)]'=kf^{k-1}(x)f'(x). \tag{3}$$

定理 如果$p(x)$是 $f(x)$的一个 $k(k\geqslant1)$重不可约因式，那么$p(x)$是 $f(x)$的导数$f'(x)$的$k-1$重因式。特别地，$f(x)$的单因式不是$f'(x)$ 的因式。

证明 因为 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，所以

$$f(x)=p^k(x)g(x),$$

并且 $p(x)$不整除$g(x)$。求 $f(x)$的导数，得

$$\begin{aligned}f'(x)&=p^k(x)g'(x)+kp^{k-1}(x)p'(x)g(x)\\&=p^{k-1}(x)[p(x)g'(x)+kp'(x)g(x)]\end{aligned}$$

$p(x)$ 不能整除括号里的第二项。事实上，$p'(x)$ 的次数，因而

$kp'(x)$的次数低于$p(x)$的次数，所以$p(x)$不能整除$kp'(x)$；又由已知的条件$p(x)$不能整除$g(x)$。因此，根据上节命题，$p(x)$不能整除乘积$kp'(x)g(x)$。但$p(x)$能整除括号里的第一项，因此$p(x)$不能整除括号里的和。这就是说：$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式。

推论 1 **如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，那么 $p(x)$ 是 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式。**

根据定理，对k作数学归纳法即得。

推论 2 **不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$的重因式当且仅当 $p(x)$ 是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式。**

事实上，$f(x)$的重因式必是$f'(x)$的因式，因而是$f(x)$与$f'(x)$的公因式。反之，$f(x)$与$f'(x)$的不可约公因式，它是$f(x)$的一个因式而决不会是单因式。

推论 3 **多项式 $f(x)$ 没有重因式当且仅当 $f(x)$ 与 $f'(x)$互质。**

这个推论给予一个判断多项式有无重因式的实际方法，即通过初等的代数运算——辗转相除法便可解决问题。不仅如此，由于多项式的导数以及两个多项式互质与否的事实在由数域F过渡到较大的数域$\overline{F}$时都无改变，所以可得以下结论：

设$f(x)$是F上的多项式，$\overline{F}$是比F较大的数域。如果$f(x)$在F上没有重因式，那么把$f(x)$看做$\overline{F}$上的多项式，它也没有重因式。

下面我们来介绍分离重因式法。用分离重因式法可以把有重因式的多项式$f(x)$的问题的研究化为若干个没有重因式的多项式问题的研究。

假定用上述方法已经断定$f(x)$有重因式，因此$f(x)$与$f'(x)$的最大公因式$d_1(x)\neq 1$。令$f(x)$有标准分解式为

$$f(x)=a_0p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_r^{m_r}(x)$$

由定理

$$f'(x)=p_1^{m_1-1}(x)p_2^{m_2-1}(x)\cdots p_r^{m_r-1}(x)g(x),$$

此处 $g(x)$ 不能被任何 $p_i(x)(i=1, 2, \cdots, r)$整除。于是易知，

$$d_1(x)=p_1^{m_1-1}(x)p_2^{m_2-1}(x)\cdots p_r^{m_r-1}(x).$$

用 $d_1(x)$除 $f(x)$ 得

$$\frac{f(x)}{d_1(x)}=h_1(x)=a_0p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x).$$

这样我们得到一个没有重因式的多项式 $h_1(x)$，并且不计重数，$h_1(x)$与 $f(x)$含有完全相同的不可约因式。因此，欲求 $f(x)$ 的不可约因式，只需求 $h_1(x)$ 的不可约因式。由于 $h_1(x)$ 的次数低于 $f(x)$ 的次数，所以 $h_1(x)$ 的不可约因式可能比较容易求得。如果已经知道 $h_1(x)$ 的一个不可约因式，那么就不难决定它在 $f(x)$中的重数，这只须应用带余除法即可计算出来。

进一步，我们还可以把 $f(x)$ 的有相同重数的因式，从 $f(x)$ 的分解式中分离出来。为此，设在 $f(x)$ 的标准分解式中，因式的最高重数为 s，$s>1$。令 $F_1(x)$为 $f(x)$的一切单因式的乘积；$F_2(x)$ 为 $f(x)$ 的一切二重因式的乘积，但是每一因式只取一次；这样下去，最后令 $F_s(x)$为 $f(x)$的一切 s 重因式的乘积，也是每一因式只取一次。如果$f(x)$没有某一重数 j 的因式，那么令$F_j(x)=1$。于是$f(x)$的分解式可以写成以下形式：

$$f(x)=a_0F_1(x)F_2^2(x)\cdots F_s^s(x),$$

而 $f(x)$ 与 $f'(x)$的最大公因式 $d_1(x)$ 的分解式可以写成：

$$d_1(x)=F_2(x)F_3^2(x)\cdots F_s^{s-1}(x).$$

令 $d_2(x)$ 是 $d_1(x)$ 与其导数 $d_1'(x)$ 的最大公因式，一般令 $d_i(x)$ 是 $d_{i-1}(x)$与其导数$d'_{i-1}(x)$的最大公因式，那么同样可得一串等式：

$$d_2(x)=F_3(x)F_4^2(x)\cdots F_s^{s-2}(x),$$

$$d_3(x)=F_4(x)F_5^2(x)\cdots F_s^{s-3}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d_{s-1}(x)=F_s(x),$$

$$d_s(x)=1.$$

再令

$$h_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=a_0F_1(x)F_2(x)\cdots F_s(x),$$

$$h_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=F_2(x)F_3(x)\cdots F_s(x),$$

……………

$$h_s(x)=\frac{d_{s-1}(x)}{d_s(x)}=F_s(x).$$

从此便可得出

$$F_1(x)=\frac{h_1(x)}{a_0h_2(x)},\quad F_2(x)=\frac{h_2(x)}{h_3(x)},\ \cdots,$$

$$F_s(x)=h_s(x).$$

这样就把所有的 $F_i(x)$都求出来了。

上面求出的 $F_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$都没有重因式，$F_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$的所有不可约因式恰是 $f(x)$ 的所有 i 重因式。于是，只要能把每一 $F_i(x)$的不可约因式都求出来，我们就知道了 $f(x)$的一切不可约因式及其应有的重数。这种求 $F_i(x)$的方法叫做**分离重因式法**。显然，这种方法是比较麻烦的，但这主要是反复做带余除法就是了，因之它还是行之有效的方法。它的优点是：无须知道不可约因式是什么，就能决定其应有的重数；其次，$F_i(x)$ 的次数一般低于 $h_1(x)$ 的次数，因而求 $F_i(x)$ 的不可约因式可能更容易些；再次，只要求得 $F_i(x)$ 的一个不可约因式，就知道它在 $f(x)$ 中的重数必为 i，而不必再去计算。当然，$F_i(x)$ 的不可约因式也是不一定能够求出的，因此用分离重因式法不一定能求出 $f(x)$ 的标准分解式。

例　分离有理数域上的多项式

$$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$$

的重因式。

解　$f(x)$的导数是

$$f'(x)=5x^4-30x^2-40x-15.$$

我们依次求得

$$d_1(x)=(f(x),\ f'(x))=x^3+3x^2+3x+1,$$
$$d_2(x)=(d_1(x),\ d_1'(x))=x^2+2x+1,$$
$$d_3(x)=(d_2(x),\ d_2'(x))=x+1,$$
$$d_4(x)=(d_3(x),\ d_3'(x))=1.$$

于是

$$h_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=x^2-3x-4,$$
$$h_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=x+1,$$
$$h_3(x)=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=x+1,$$
$$h_4(x)=\frac{d_3(x)}{d_4(x)}=x+1.$$

从此得出

$$F_1(x)=\frac{h_1(x)}{h_2(x)}=x-4,$$
$$F_2(x)=\frac{h_2(x)}{h_3(x)}=1,$$
$$F_3(x)=\frac{h_3(x)}{h_4(x)}=1,$$
$$F_4(x)=h_4(x)=x+1.$$

这样，$f(x)$ 有一个单因式 $x-4$，及一个四重因式 $x+1$，而没有二重及三重因式．所以

$$f(x)=(x-4)(x+1)^4.$$

下面把例中的具体计算写出来．

先求 $d_1(x)$，为了避免分数，以$\frac{1}{5}$乘 $f'(x)$ 后，再做除法：

$$\begin{array}{r|l} x^5-10x^3-20x^2-15x-4 & x^4-6x^2-8x-3 \\ \underline{x^5-\ \ 6x^3-\ \ 8x^2-3x\quad} & \quad x \\ -4x^3-12x^2-12x-4 & \end{array}$$

第一余式$r_1(x)=-4x^3-12x^2-12x-4$，以$\frac{1}{-4}$乘之，再做除法．

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\quad -6x^2-8x-3 & x^3+3x^2+3x+1 \\
\underline{x^4+3x^3+3x^2+\ \ x\qquad} & x-3 \\
-3x^3-9x^2-9x-3 & \\
\underline{-3x^3-9x^2-9x-3} & \\
0 &
\end{array}
$$

这说明 $r_1(x)|f'(x)$，即

$$d_1(x)=x^3+3x^2+3x+1.$$

求 $d_2(x)$：$d_1'(x)=3x^2+6x+3$，以$\frac{1}{3}$乘之，再做除法。

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+3x^2+3x+1 & x^2+2x+1 \\
\underline{x^3+2x^2+\ \ x\qquad} & x+1 \\
x^2+2x+1 & \\
\underline{x^2+2x+1} & \\
0 &
\end{array}
$$

即 $d_1'(x)|d_1(x)$，所以 $d_2(x)=x^2+2x+1$。

求 $d_3(x)$：$d_2'(x)=2x+2$，以$\frac{1}{2}$乘之，再做除法。此处明显的可以看出，$d_2'(x)|d_2(x)$，所以

$$d_3(x)=x+1.$$

求$d_4(x)$：$d_3'(x)=1$，所以$d_4(x)=(d_3(x),\ d_3'(x))=1$。

综上所述，就得

$$d_1(x)=(f(x),\ f'(x))=x^3+3x^2+3x+1,$$
$$d_2(x)=(d_1(x),\ d_1'(x))=x^2+2x+1,$$
$$d_3(x)=(d_2(x),\ d_2'(x))=x+1,$$
$$d_4(x)=(d_3(x),\ d_3'(x))=1.$$

以下求$h_i(x)(i=1,\ 2,\ 3,4)$。这里只有 $h_1(x)$需要具体计算一下，而 $h_2(x)$、$h_3(x)$、$h_4(x)$ 都明显地可以看出来。当然，上面的 $d_2(x)=x^2+2x+1$也是可以观察出来的。

练 习 五

1. 判断下列多项式有无重因式，如果有，试求出重数。

（1）$f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4$；

（2） $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$。

2．问 a，b 应满足什么条件，下列的有理系数多项式才能有重因式：

（1） $x^3+3ax+b$；

（2） $x^4+4ax+b$。

3．证明　有理系数多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

没有重因式。

4．利用分离重因式方法求下列多项式的标准分解式。

（1） $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$，

（2） $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$。

§6　多项式的根

多项式的整除理论与多项式的根有密切的联系。后者是多项式理论中的一个主要讨论对象。本节介绍多项式根的概念和基本性质。

设数域 F 上的多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

其中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$是数域 F 中的数，n 为非负整数，而 x 我们曾经把它叫做“可运算的符号”。什么叫可运算的符号呢？实际含意是它可以具体化为任何一个数学对象（例如 F 中的数），使多项式（1）中的每一运算符号（例如：x^3 表示三个 x 自乘；$a_{n-1}x$ 表示 x 与 F 中的数 a_{n-1} 相乘；$a_0x^n+a_1x^{n-1}$ 表示两个积 a_0x^n 与 a_1x^{n-1} 相加）有意义，从而使表达式（1）具有确定的意义。例如，让 x 具体化为 F 中一个确定的数 c，即令 $x=c$，那么（1）式就有确定的意义。它表示 F 中一个确定的数 $b=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c+a_n$。这时，我们就说：$x$ 具体化为 F 中的数 c 时，

$f(x)$的值等于 b，也可简单地说，$x=c$ 时 $f(x)$ 的值等于 b 或者说 b 是 $x=c$时 $f(x)$的值，记作：$f(c)=b$。

不难看出，如果

$$h_1(x)=f(x)+g(x),\quad h_2(x)=f(x)g(x)$$

那么对 F 中任何数 c，则

$$h_1(c)=f(c)+g(c),\quad h_2(c)=f(c)g(c).$$

显然，零多项式的值，不论 x 为 F 中什么数，它总等于零；零次多项式 $f(x)=a$ 的值，不论 x 为 F 中什么数，总等于 a.

定义 **令 $f(x)$ 是 F 上的一个多项式，c 是 F 中的一个数，若 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值等于零：$f(c)=0$，那么 c 叫做$f(x)$ 在 F 中的一个根或零点。**

根据定义，对零多项式来说，数域 F 中的每一个数 c 都是它的根；对零次多项式来说，数域 F 中的每一个数 c 都不是它的根。

利用带余除法，我们有下面常用的定理。

定理 1 **用一次多项式 $x-c$ 除多项式 $f(x)$ 所得余式等于当 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值 $f(c)$。**

证明 用一次多项式除 $f(x)$ 所得余式或者等于零或者是一个零次多项式。因此，在任何情况下，余式总是 F 中的一个数 r：

$$f(x)=(x-c)q(x)+r,$$

取等式两端在 $x=c$ 时的值，则有

$$f(c)=(c-c)q(c)+r,$$

$$f(c)=r.$$

推论 **c 为 $f(x)$ 的根的充分且必要条件是 $x-c$ 整除 $f(x)$。**

这个推论说明，求 $f(x)$ 在 F 中的根相当于求它的一次因式 $x-c$。

要判断一次式 $x-c$ 是不是$f(x)$ 的因式，可以用带余除法，以 $x-c$ 除 $f(x)$．但是我们还有一个更简便的方法，叫做综合除法。

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

并设

$$f(x)=(x-c)q(x)+r \tag{2}$$

其中 $q(x)$ 必为一个 $n-1$ 次多项式：

$$q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}.$$

比较等式（2）中 x 的同次幂的系数，我们得到

$$\begin{aligned}
a_0&=b_0\\
a_1&=b_1-cb_0,\\
a_2&=b_2-cb_1,\\
&\vdots\\
a_{n-1}&=b_{n-1}-cb_{n-2},\\
a_n&=r-cb_{n-1}.
\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}
b_0&=a_0,\\
b_1&=cb_0+a_1,\\
b_2&=cb_1+a_2,\\
&\vdots\\
b_{n-1}&=cb_{n-2}+a_{n-1},\\
r&=cb_{n-1}+a_n.
\end{aligned}$$

这样，欲求系数 b_k，只须把前一系数 b_{k-1} 乘以 c 再加上对应系数 a_k，而余式 r 也可以按照类似的规律求出。因此，按照下表所指出的算法就可以很快地陆续求出商式的系数及余式：

$$\begin{array}{c|cccc}
c & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\
\hline
 & a_0=b_0 & cb_0+a_1=b_1 & cb_1+a_2=b_2 & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\cdots & a_{n-1} & a_n \\
\hline
\cdots & cb_{n-2}+a_{n-1}=b_{n-1} & cb_{n-1}+a_n=r
\end{array}$$

我们先在横线上边写出 $f(x)$ 按 x 降幂书写出的系数，在竖线左边写出 c，然后在横线下边依次算出商式的系数及余式。

例 1　以 $x+3$ 除 $f(x)=x^4+x^2+4x-9$。

作综合除法

$$\begin{array}{r|ccccc} -3 & 1 & 0 & 1 & 4 & -9 \\ \hline & 1 & -3\cdot1+0=-3 & (-3)(-3)+1=10 & (-3)\cdot10+4=-26 & (-3)(-26)-9=69 \end{array}$$

所以商式是

$$q(x)=x^3-3x^2+10x-26.$$

而余式

$$r=f(-3)=69.$$

例 2　以 $x-5$除 $f(x)=2x^4-13x^3+19x^2-23x+15$。

作综合除法

$$\begin{array}{r|ccccc} 5 & 2 & -13 & 19 & -23 & 15 \\ \hline & 2 & -3 & 4 & -3 & 0 \end{array}$$

所以商式是

$$q(x)=2x^3-3x^2+4x-3$$

余式等于零。这样，$x-5|f(x)$，而 5 是 $f(x)$ 的一个根。

由例 1 还可以看出，用综合除法能够很快地求出一个多项式 $f(x)$当 $x=c$ 时的值 $f(c)$。

利用多项式的根与其一次因式间的关系容易看出，一个 n 次多项式最多能有多少个根。为此，我们先说明一下重根的概念。

设 c 是非零多项式 $f(x)$的一个根。于是有 $x-c|f(x)$。由于每一个一次式都是不可约的，所以 $x-c$ 一定在 $f(x)$ 的标准分解式中出现。若 $x-c$ 是 $f(x)$ 的 $k(k>1)$ 重因式，我们就说 c 是 $f(x)$ 的 k 重根。若 $x-c$ 是 $f(x)$的单因式，就说 c 是 $f(x)$的单根。

定理 2　若k重根按 k 个根计算，则F上的一个 n 次多项式 $f(x)$在F中最多有 n 个根。

证明　$n=0$ 时定理显然成立，因为这时 $f(x)$ 在 F 中根的个数等于零。

设　$n>0$。令$x-c_1$，$x-c_2$，…，$x-c_t$是出现在 $f(x)$的标准分解式中所有不同的一次因式，它们的重数分别是 k_1，k_2，…，k_t。那么

$$f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\cdots(x-c_t)^{k_t}g(x),$$

其中$g(x)$在F上再没有一次因式。因此$f(x)$在F中的根只能是c_1，c_2，…，c_s，它们的重数分别是k_1，k_2，…，k_s。比较等式两端的次数，得

$$k_1+k_2+\cdots+k_s\leqslant n,$$

这就证明了定理。

由此可得

定理 3 如果多项式$f(x)$，$g(x)$的次数都不超过n，而它们对$n+1$个不同的数c_1，c_2，…，c_{n+1}有相同的值，即

$$f(c_i)=g(c_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$$

那么，$f(x)=g(x)$。

证明 令$h(x)=f(x)-g(x)$。

若$h(x)\neq 0$，即$f(x)\neq g(x)$，那么$h(x)$是一个次数不超过n的多项式，但它至少有$n+1$个不同的根c_1，c_2，…，c_{n+1}。这与定理 2 矛盾。

由此定理，使我们可从另一观点来认识数域F上的多项式，即把数域F上的多项式看成通常所说的函数。
设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是F上的一个多项式。我们知道对F中的每一个数c，由$f(x)$确定一个数——$f(x)$的值$f(c)$。这就是说，多项式$f(x)$定义一个确定的函数，它的定义域是F。当F为实数域时，这正是数学分析中的多项式函数。一般地，我们就把由F上多项式$f(x)$定义的函数叫做F上的多项式函数。关于两个函数说是相等，自然是，对自变数x的每一个值，它们的函数值总相等。这样，由上述定理可得：F上的两个多项式$f(x)$与$g(x)$相等当且仅当它们所定义的多项式函数是相等的。换句话说：每一多项式都定义一个确定的函数，不同的多项式所定义的函数也不同。因此，这使我们可以采取函数的观点来建立多项式的理论。

上面定理 2 说明：任何一个n次多项式$f(x)$其根的个数不能

超过它的次数 n。但是，F 上的任一非零多项式 $f(x)$，在数域 F 中未必有根，即使有根，也未必有 n 个（n 为其次数）。例如，有理系数多项式 x^4-4 在有理数域中就没有根。如果把它看作是实系数的多项式，那么在实数域中含有 x^4-4 的根，即 $\pm\sqrt{2}$，而根的个数还小于它的次数 4。在复数域中恰好含有它的四个根，即 $\pm\sqrt{2}$，$\pm\sqrt{2}\,i$。此例说明，F 上的多项式在 F 中可能没有根，但在比 F 大的数域中含有它的根，而在最大的数域，即复数域中含有它所能有的全部根。这不是偶然的，因为有著名的

定理 4　（代数基本定理）任何 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$，在复数域中至少有一个根。

由此便有

定理 5　任何 n 次多项式 $f(x)$，在复数域中恰好有 n 个根。

对 $f(x)$ 的次数作数学归纳法，由定理 4 可得定理 5。

定理 4 对多项式根的讨论来说，当然是个基础，因而得名为"代数基本定理"。但是，目前代数学的范围已非常广泛，因而这一名称只能有其历史上的意义了。"代数基本定理"的证明方法很多，但都比较复杂，所以我们这里，承认其结论而不做证明了。

由定理 5 我们可以得到根与系数的关系。

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\ n>0,\ a_0\neq 0.$$

由定理 5，$f(x)$ 恰有 n 个复数根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。因此，$f(x)$ 必能写成 n 个一次因式的乘积：

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

把等式右端展开、并项、比较等式两端同次项的系数，便得根与系数的关系如下：

$$\frac{a_1}{a_0}=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

$$\frac{a_2}{a_0}\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

以上这组等式叫做韦达公式．公式中第 k ($k=1,\ 2,\cdots,n$) 个等式的右端是一切可能的 k 个根的乘积的和乘以 $(-1)^k$．当 $n=2$ 时，就是我们已知的二次多项式的根与系数的关系．

利用韦达公式可以容易求出有已知根的多项式．例如，求有单根 5 与 -2，以及二重根 3 的四次多项式．由韦达公式，我们便有

$$a_1=-(5-2+3+3)=-9,$$

$$a_2=5\cdot(-2)+5\cdot3+5\cdot3+(-2)\cdot3+$$
$$+(-2)\cdot3+3\cdot3=17,$$

$$a_3=-[5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot(-2)\cdot3+5\cdot3\cdot3+$$
$$+(-2)\cdot3\cdot3=33,$$

$$a_4=5\cdot(-2)\cdot3\cdot3=-90.$$

所以，所求的四次多项式

$$f(x)=x^4-9x^3+17x^3+33x-90,$$

或

$$f(x)=ax^4-9ax^3+17ax^2+33ax-90a,$$

其中 a 为任一不等于零的常数．

练　习　六

1．用综合除法计算 $f(x_0)$

（1）$f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\qquad x_0=4;$

（2）$f(x)=3x^5-12x^3-10x^2-587x-13,\qquad x_0=5.$

2．判断 5 是不是多项式

$$f(x)=3x^5-224x^3+742x^2+5x+50$$

的根，如果是的话，是几重根？

3．试决定 a，b 使得

（1）$f(x)=2x^3+3x^2+bx-1$ 除以 $x+3$ 所得余数为 -4。

（2）$f(x)=2x^3-3x^2+ax+b$ 除以 $x+1$ 所得余数为 7，除以 $x-1$ 所得余数为 5。

4．证明 $x^n+ax^{n-m}+b$ 不能有不为零的重数大于 2 的根。

5．证明 a 是 $f(x)$ 的 k 重根的充分必要条件是

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0，而f^{(k)}(a)\neq 0。$$

§7　方程及其变换

大家知道，在生产实践中和科学技术上有许多实际问题常常归结为如下的数学问题，即需要寻求一个（或几个）满足一定数学式子的数．如果用一个文字 a 来代表这个欲求而尚未求出的数，那么根据问题的具体条件就会推导出一个（或几个）含有 a 的数学式子：

$$f(a)=g(a) \tag{1}$$

其中 $f(a)$与$g(a)$是多项式（或其它数学式）$f(x)$与 $g(x)$在 $x=a$ 时的值．这就是说：欲求而尚未求出的是这样一个数 a，当$x=a$时，$f(x)$与 $g(x)$ 的值相等，即 $f(a)=g(a)$。

这样，我们把含有待求的未知数值 a，写成等式形式的式子（1）叫做关于未知数 a 的方程．

如果有数 a，使方程（1）成为确实的等式，则方程（1）叫做可解的，每一这样的数 a 都叫做方程（1）的一个解．否则，方程（1）就叫无解的（也叫矛盾的）．

为了简便，通常就把方程（1）中待求的未知数 a 写成 x，这样做是不会产生误解的。因为凡是说及方程（1）时，所指就是上述的含义，而不会把（1）看成是两个多项式相等的一个等式。

从（1）经过移项，使其右端为零，可得方程

$$h(x)=f(x)-g(x)=0, \tag{2}$$

显然，（1）与（2）有完全相同的解或同时无解．此时称方程

（1）与（2）是同解的。由此，凡方程都可写成右端为零而左端恰为一个多项式的形式。

与多项式的根连系起来，我们便有以下结论：a是方程 $f(x)=0$ 的解当且仅当 a 是多项式 $f(x)$ 的根。

由此可见，方程的解及求解问题完全相当于多项式的根及求根问题。

多项式 $f(x)$的根也叫方程 $f(x)=0$的根，$f(x)$ 的次数就叫做方程 $f(x)=0$ 的次数。

下面我们来研究方程的变形问题。

n 次方程

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0 \qquad (3)$$

的求根问题是一个相当复杂的问题，对任意次数较高的方程，没有一个一般的方法求出它的根。因此把方程进行适当变形，借助于新方程来研究原方程根的性质就显得非常必要了。特别地，有些特殊类型的方程也可以把方程适当变形，从而求出方程的根。

1. 倍根变换

设 $k\neq0$，取

$$y=kx$$

以 $x=\frac{1}{k}y$代入（3），再通乘以 k^n得

$$g(y)=a_ny^n+a_{n-1}ky^{n-1}+\cdots+a_1k^{n-1}y+a_0k^n=0$$

那么，方程 $g(y)=0$ 的根是方程 $f(x)=0$ 的根的 k 倍。

事实上 设 $\beta_i=k\alpha_i$ 是 $g(y)=0$ 的任意一个根，我们证明 $f(\alpha_i)=0$。因为

$$\begin{aligned}g(k\alpha_i)&=a_n(k\alpha_i)^n+a_{n-1}k(k\alpha_i)^{n-1}+\cdots\\&\quad+a_1k^{n-1}(k\alpha_i)+k^na_0\\&=k^n(a_n\alpha_i^n+a_{n-1}\alpha_i^{n-1}+\cdots+a_1\alpha_i+a_0)\\&=k^nf(\alpha_i)=0。\end{aligned}$$

这里 $k\neq0$，所以 $f(\alpha_i)=0$。

当 $k=-1$ 时，变换

$$y=-x$$

又叫负根变换．这时

$g(y)=a_ny^n-a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+(-1)^sa_{n-s}y^{n-s}+\cdots+(-1)^na_0$若 α_i 是 $g(y)$ 的根，则 $-\alpha_i$ 是 $f(x)$ 的根。

2．倒根变换

取变换

$$y=\frac{1}{x}$$

以 $x=\frac{1}{y}$代入方程（3）．再通乘以 y^n 得

$$g(y)=a_n+a_{n-1}y+\cdots+a_1y^{n-1}+a_0y^n=0.$$

当 $a_0\neq0$ 时，$g(y)$ 为 n 次多项式，设 β_1，β_2，…，β_n 为 $g(y)=0$的 n 个根．则 β_1^{-1}，β_2^{-1}，…，β_n^{-1} 恰是 $f(x)=0$ 的 n 个根。

事实上　因为 $a_n\neq0$，所以 β_1，β_2，…，β_n 均不为 0．

$$\begin{aligned}f(\beta_i^{-1})&=a_n(\beta_i^{-1})^n+a_{n-1}(\beta_i^{-1})^{n-1}+\cdots+a_1\beta_i^{-1}+a_0\\&=(\beta_i^{-1})^n[a_n+a_{n-1}\beta_i+\cdots+a_1\beta_i^{n-1}+a_0\beta_i^n]\\&=(\beta_i^{-1})^ng(\beta_i)=0\end{aligned}$$

故 $\beta_i^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$是 $f(x)=0$ 的根。

当 $a_0=0$ 时，特别地，如果 $f(x)=0$，以 0 为它的 s 重根，则 $a_0=\cdots=a_{s-1}=0$，但 $a_s\neq0$，这时有

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_sx^s=0$$

于是

$$g(y)=a_n+a_{n-1}y+\cdots+a_sy^{n-s}$$

是一个$n-s$次多项式，它只有$n-s$个根。设$\beta_i(i=1,2,\cdots,n-s)$是$g(y)$的根．因为 $a_n\neq0$，所以，这些根都是非零的，那么，有

$$\begin{aligned}f(\beta_i^{-1})&=a_n(\beta_i^{-1})^n+a_{n-1}(\beta_i^{-1})^{n-1}+\cdots+a_s(\beta_i^{-1})^s\\&=(\beta_i^{-1})^n[a_n+a_{n-1}\beta_i+\cdots+a_s\beta_i^{n-s}]\\&=(\beta_i^{-1})^ng(\beta_i)=0\end{aligned}$$

由 $f(x)=(a_nx^{n-s}+a_{n-1}x^{n-s-1}+\cdots+a_s)x^s=0$恰有$n-s$个非零根，故 β_1^{-1}，β_2^{-1}，…，β_{n-s}^{-1}是 $f(x)=0$的仅有的非零根。

3. 平方变换

$$y=x^2$$

设方程 $f(x)=0$ 的 n 个根为 α_1, α_2, …, α_n。我们来求一个 n 次方程$g(y)=0$，使它的 n 个根为 α_1^2, α_2^2, …, α_n^2。因为

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

故

$$(-1)^n f(-x)=a_n(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_n),$$

$$(-1)^n f(x)f(-x)=a_n^2(x^2-\alpha_1^2)(x^2-\alpha_2^2)\cdots(x^2-\alpha_n^2)$$

在$(-1)^n f(x)f(-x)$中令 $x^2=y$，则得

$$g(y)=a_n^2(y-\alpha_1^2)(y-\alpha_2^2)\cdots(y-\alpha_n^2)。$$

显然，方程 $g(y)=0$以α_1^2, α_2^2, …,α_n^2 为它的 n 个根。

例 1　作一个 4 次方程,使其 4 个根恰是方程 $f(x)=4x^4-5x+$ $+1=0$的 4 个根的各自平方。

解　$(-1)^4 f(x)f(-x)=(4x^4-5x+1)(4(-x)^4-5(-x)+1)$

$$=16x^8+8x^4-25x^2+1$$

令　$y=x^2$ 代入上式得

$$g(y)=16y^4+8y^2-25y+1$$

则 $g(y)=0$ 即为所求方程。

对于只含偶次项的方程，特别是只含偶次项的 4 次方程，平方变换可以降低方程的次数，从而求出方程的根。

例 2　解方程

$$4x^4-5x^2+1=0$$

解　设 $x^2=y$，则原方程化为

$$4y^2-5y+1=0$$

从而得：$y_1=\frac{1}{4}$, $y_2=1$。再代入 $x^2=y$中，于是，得 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=1$, $x_4=-1$。

4. 平移变换

令

$$y=x-k$$

以 $x=y+k$ 代入（3）再化简得

$$g(y)=b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0=0$$

这样的变换称为平移。若 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 $f(x)=0$ 的 n 个根，则 $\alpha_i-k(i=1, 2, \cdots, n)$是 $g(y)=0$的全部根。

事实上 $g(y)=0$是由 $x=y+k$代入 $f(x)=0$整理得到的。即有 $f(x)=f(y+k)=g(y)=0$，而

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\\
&=a_n(y+k-\alpha_1)(y+k-\alpha_2)\cdots(y+k-\alpha_n)\\
&=a_n(y-(\alpha_1-k))(y-(\alpha_2-k))\cdots(y-(\alpha_n-k))\\
&=g(y)=0
\end{aligned}
$$

这就说明 $\alpha_i-k(i=1, 2, \cdots, n)$ 恰为 $g(y)=0$ 的全部根。

平移变换在方程式论中是非常有用的。因此如何简捷地求出 $f(x+k)$或 $g(y)$ 的系数是尚待解决的一个重要问题。下面介绍用综合除法求方程 $g(y)=0$ 的系数。

因为 $g(y)=0$是由方程 $f(x)=0$经代换$x=y+k$得到的。同样，在方程$g(y)=0$中令 $y=x-k$又可以得到 $f(x)=0$，即 $f(x)=f(y+k)=g(y)=g(x-k)$，因此

$f(x)=b_n(x-k)^n+b_{n-1}(x-k)^{n-1}+\cdots+b_1(x-k)+b_0$，以$x-k$除 $f(x)$ 得

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\{b_n(x-k)^{n-1}+b_{n-1}(x-k)^{n-2}+\cdots\\
&+b_2(x-k)+b_1\}(x-k)+b_0=q_1(x)(x-k)+b_0
\end{aligned}
$$

于是，b_0 就是以 $x-k$ 除 $f(x)$ 所得的余数。再以 $x-k$ 除 $q_1(x)$得

$$
\begin{aligned}
q_1(x)=&\{b_n(x-k)^{n-2}+b_{n-1}(x-k)^{n-3}+\cdots\\
&+b_2\}(x-k)+b_1=q_2(x)(x-k)+b_1
\end{aligned}
$$

因此，b_1 是以 $x-k$ 除 $q_1(x)$所得的余数，同样地，再用 $x-k$ 去除 $q_2(x)$所得商和余数分别是 $q_3(x)$，b_2。一般地，以 $x-k$ 除商 $q_j(x)$ 所得余数是$b_j(j=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，而 $b_n=a_n$。这样就得到了 b_n，b_{n-1}，$\cdots$，b_1，b_0。

例 3　设 $f(x)=x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$。把 $f(x)=0$ 变成关于 $x-4$ 的方程。

解　令 $y=x-4$，实际上就是求 $g(y)$ 的系数，用综合除法

以 $x-4$ 除 $f(x)$ 得

$$f(x)=(x^3-x^2+3x-5)(x-4)-9$$

$$=q_1(x)(x-4)-9 \qquad \cdots(b_0=-9)$$

再以 $x-4$ 除 $q_1(x)$，得

$$q_1(x)=(x^2+3x+15)(x-4)+55$$

$$=q_2(x)(x-4)+55 \qquad \cdots(b_1=55)$$

再以 $x-4$ 除 $q_2(x)$，得

$$q_2(x)=(x+7)(x-4)+43$$

$$=q_2(x)(x-4)+43 \qquad \cdots(b_2=43)$$

最后，以 $x-4$ 除 $q_3(x)$，得

$$q_3(x)=(x-4)+11 \qquad \cdots(b_3=11)$$

故

$$f(x)=(x-4)^4+11(x-4)^3+43(x-4)^2+55(x-4)-9$$

$$=0$$

上面算式可列成下表

1	−5	7	−17	11	4
1	−1	3	−5	−9	
1	3	15	55		
1	7	43			
1	11				
1					

表中第一行是由 $f(x)$ 的系数组成，而表中第 i 行（$i>1$）是商 $q_{i-1}(x)$ 的系数组成。我们看到虚斜线上的数自下而上顺次为所要求的系数。

用平移变换可使新得方程缺第二项。

事实上　令 $y=x-k$，而以 $x=y+k$ 代入方程 $f(x)=0$，则得

$$g(y)=f(y+k)=a_n(y+k)^n+a_{n-1}(y+k)^{n-1}+\cdots+a_0$$
$$=a_ny^n+(na_nk+a_{n-1})y^{n-1}+\cdots$$

故，若取 $k=-\dfrac{a_{n-1}}{na_n}$则 y^{n-1} 的系数为 0 。

例 4　利用平移变换将方程

$$x^3-6x^2+4x-17=0$$

化为缺少第二项的方程

解　取 $k=-\dfrac{a_{n-1}}{na_n}=\dfrac{6}{3}=2$

令　$y=x-2$，以 $x-2$做除式连续用综合除法

1	−6	4	−17	|2
1	−4	−4	−25	
1	−2	−8		
1	0			
1				

故　$g(y)=y^3-8y-25=0$ 即为所求的方程。

练　习　七

1．求出以下列方程根的 k 倍为根的方程

（1）$6x^4-7x^3+8x^2-7x+2=0$，　　$k=6$，

（2）$3x^3-26x^2+3x-12=0$，　　$k=3$。

2．变方程 $3x^4-4x^3+4x^2-2x+1=0$ 为另一方程，使其首项系数为 1 。

3．作一方程 $g(y)=0$，使其根比方程

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

的根大 1 。

4．求作一方程 $g(y)=0$，使其根恰是方程 $x^4-2x^4+5x^2+7x+1=0$的根的倒数。

5．变方程 $x^4-4x^3-3x^2+2x+2=0$为缺少第二项之方程。

§ 8　复系数多项式

代数基本定理虽然肯定了 n 次多项式恰有 n 个复数根，但这只是一个存在性的结论，至今所见关于该定理的任何一种证明都没有给出根的具体求法．然而在应用方面，求多项式的根是一个重要的课题．这是一个相当复杂的问题，它构成了计算数学的一个分支．在这里我们从中学数学教学的角度出发，介绍有关求根问题的一些基本结果，分做以下三节来讲．

本节讨论复系数多项式的求根问题．

首先顺便说明一个问题．根据代数基本定理和多项式的根与其一次因式的关系可知：在复数域上看，次数大于 1 的多项式必定是可约的．换句话说：凡不可约多项式必为一次式．因而，任何一个 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$，在复数域上来看，它的标准分解式应为如下形式：

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r},$$

其中 α_1，α_2，$\cdots$，α_r是不同的复数，m_1，m_2，$\cdots$，m_r 是正整数．

下面来讨论复系数多项式的求根问题．我们已经知道：一次、二次多项式都有求根公式，它们是由系数经过有限次的加、减、乘除和开方运算来表达的．一般地，如果一个多项式的根可由多项式的系数经过有限次加、减、乘、除和开方运算来表出，那么就说这个多项式能用**根式解**，因此，一次、二次多项式都能用根式解．进而我们自然会想到：对于次数大于 2 的多项式是否也能用根式解呢？以下证明三次、四次多项式都能用根式来解．

首先，我们推导三次多项式的求根公式．

设给定了系数是任意复数的一个三次多项式（不妨令其首项系数等于 1）：

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \tag{1}$$

利用关系式

$$y = x + \frac{a_1}{3} \tag{2}$$

则得到简化了的关于 y 的三次多项式

$$y^3 + py + q \tag{3}$$

其中

$$p = a_2 - \frac{a_1^2}{3}, \quad q = a_3 - \frac{a_1 a_2}{3} + \frac{2a_1^3}{27}.$$

这样，三次多项式的根式解问题就归结为推导二次项系数为零的三次多项式（3）的求根公式。

令 $y = u + v$，则

$$y^3 = (u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 = 3uvy + u^3 + v^3,$$

所以

$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0,$$

由此可以看出，如果存在复数 u_0 与 v_0，使

$$u_0^3 + v_0^3 = -q, \qquad u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$$

那么 $y_0 = u_0 + v_0$ 就是多项式（3）的根，故问题化为解方程组

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3}. \end{cases} \tag{4}$$

由 $uv = -\frac{p}{3}$，得 $u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$，从而有

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

由韦达公式可知，u^3 与 v^3 是二次多项式

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27}$$

的两个根，故由二次多项式的求根公式，得

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{5}$$

这样，就得到了三次多项式（3）的求根公式：

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}}} \qquad (6)$$

公式（6）通常叫做卡当(Carden)公式。

经过计算容易知道一个复数的立方根在复数域里有三个，所以由（5）能求出 u 与 v 的各三个值。如果在卡当公式中，把 u 的每一个值与 v 的每一个值配合在一起，将得到 $u+v$ 的九个值，它们显然不能都是多项式（3）的根。事实上，由（4），用卡当公式求（3）的根时，必须选取这样的 u 与 v 的值，使它们满足

$$uv=-\frac{p}{3},$$

可以证明，在 $u+v$ 的九个值中，满足此条件的恰有三个。这一结果作为练习请读者自己证明。

其次，我们指出四次多项式也能用根式解。

设给定了系数为任意复数的四次多项式

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \qquad (7)$$

利用关系式

$$y=x+\frac{a_1}{4}$$

得到简化了的关于 y 的四次多项式

$$y^4+py^2+qy+r, \qquad (8)$$

其中

$$p=a_2-\frac{3a_1^2}{8},$$

$$q=a_3-\frac{a_1a_2}{2}+\frac{a_1^3}{8},$$

$$r=a_4-\frac{a_1a_3}{4}+\frac{a_1^2a_2}{16}-\frac{3a_1^4}{256}.$$

这样，四次多项式的根式解问题就归结为证明三次项系数为零的四次多项式能用根式解。以下的推导主要是把问题化为解一个三次多项式及两个二次多项式。为此，引进参数 t，在（8）式加上再减

去 $2ty^2+\left(\frac{p}{2}+t\right)^2$，把（8）式改写为

$$\left(y^2+\frac{p}{2}+t\right)^2-2t\left[y^2-\frac{q}{2t}y\right.$$
$$\left.+\left(\frac{t}{2}+\frac{p}{2}-\frac{r}{2t}+\frac{p^2}{8t}\right)\right] \tag{9}$$

我们选取 t 的值，使（9）式方括号里的二次多项式是一个完全平方。为此只要选取 t 的这样的值，使这个二次多项式有重根，亦即使其判别式等于零：

$$\left(-\frac{q}{2t}\right)^2-4\left(\frac{t}{2}+\frac{p}{2}-\frac{r}{2t}+\frac{p^2}{8t}\right)=0,$$

这说明所要选取之 t 值应为三次多项式

$$t^3+pt^2+\left(\frac{p^2}{4}-r\right)t-\frac{q^2}{8} \tag{10}$$

的非零根，这可由卡当公式来求出。设 t_0是多项式（10）的任一非零根。于是

$$y^4+py^2+qy+r=\left(y^2+\frac{p}{2}+t_0\right)^2-2t_0\left(y-\frac{q}{4t_0}\right)^2$$
$$=\left(y^2+\sqrt{2t_0}\,y+\frac{p}{2}+t_0-\frac{q}{\sqrt{8t_0}}\right)$$
$$\times\left(y^2-\sqrt{2t_0}\,y+\frac{p}{2}+t_0+\frac{q}{\sqrt{8t_0}}\right).$$

由此可以看出，二次多项式

$$y^2+\sqrt{2t_0}\,y+\frac{p}{2}+t_0-\frac{q}{\sqrt{8t_0}} \tag{11}$$

与

$$y^2-\sqrt{2t_0}\,y+\frac{p}{2}+t_0+\frac{q}{\sqrt{8t_0}} \tag{12}$$

的各两个根恰为四次多项式（8）的四个根。由于 t_0是三次多项式（10）的根，它可由根式解出，又二次多项式（11）与（12）的根也可由根式解出，从而四次多项式（8）能用根式解。由于这些根的表达式比较复杂而且实用价值不大，所以就不再列出这些表达

式．

在十九世纪中叶以前，解方程一直是代数学的一个中心问题，它的研究经历了一个长期发展的过程．远在两千多年以前，人们就有了二次方程的一般解法．关于方程的数值解法，我国古代数学家有过光辉的贡献．上述的三次多项式的求根公式是在十六世纪（1545），由卡当首先发表的，随后他的学生费拉里（Ferrari）给出了四次多项式的一般解法．此后，在几乎三个世纪的时间里，很多数学家在致力于寻求次数高于 4 的多项式的求根公式．这期间，在十八世纪末（1799），高斯（Gauss）首先证明了有名的代数基本定理，但是，关于根式解问题一直没有解决．直到1820年阿贝尔(Abel)证明了：当 $n>4$ 时，一般的（系数用文字表示的）n 次多项式不能用根式解．

但是阿贝尔所证明的结果并不排除这种可能性，即是每一个具体的系数是数的多项式都可以用根式来解．这一问题最后由伽罗华（Galois 1811—1832）于1830年彻底解决了．他给出了一个多项式可以用根式来解的条件，同时也证明了不能用很式来解的系数是数的多项式的存在．例如

$$x^5-4x-2$$

其实就是一个不能用根式来解的五次多项式．由于这个问题的解决，也就回答了为什么在初等几何中不能用圆规和直尺将一个角三等分等问题．

伽罗华的工作对代数学的发展有很大影响，他开辟了代数学的一个分支——**伽罗华理论**，同时也奠定了群论的基础．

§9　实系数多项式

实系数多项式在理论与应用上都占有重要地位．在实践中有许多问题，常常需要求出一个次数相当高的实系数多项式的实根．上节指出的二、三、四次多项式的求根公式，当然可以用于实系数的

情形，但三、四次多项式的求根公式用起来是很不方便的，而且五次以上的多项式也还没有类似的公式。因此必须从另一角度来看问题。在实用上所需要的往往只是在某种精确度内的根的近似值，即使已经得到求根的公式，仍须计算它的近似值。由此可见，只要有一种方法，按照这种方法可以求出根的近似值到任意指定的精确程度，那么，多项式的求根问题便应当认为是解决了。当然，这并不是说求根公式是毫无用处的，由于它用我们比较熟习的运算表达出多项式的根，从而帮助我们了解根的性质或较简便地计算根的近似值。不过，过于复杂的公式，如四次多项式的求根公式，用处确实不大。

基于以上看法，求实系数多项式的实根，可以按以下三个问题逐步予以解决：

1. **指出实根的界限；**
2. **确定实根的个数；**
3. **给出近似值的计算方法。**

第三个问题是计算数学的专门课题，这里我们不予涉及。本节只讨论前两个问题。

首先顺便说明一个问题，上节指出，由代数基本定理及根与一次因式的关系，任何多项式在复数域上必能分解成一次因式的乘积。对于实系数多项式，它在实数域上的分解也有一种特定的形式。

为此，我们指出实系数多项式的一个简单性质：

如果 α 是实系数多项式 $f(x)$ 的根，那么，α 的共轭数 $\overline{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根。

事实上，设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中 a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}，a_n，都是实数，如果 α 是 $f(x)$的根，即

$$f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n=0,$$

对上式两端同时取共轭数，有

$$a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n=0$$

这就说明$f(\overline{\alpha})=0$，即$\overline{\alpha}$也是 $f(x)$ 的根。

由此可以证明：任一次数大于 2 的实系数多项式在实数域上必可约。

事实上，设 $f(x)$为任一 $n(n>2)$次实系数多项式．由代数基本定理，$f(x)$ 在复数域内必有根，令 α 为 $f(x)$ 的一个根。若 α 为实数，则 $x-\alpha|f(x)$，所以 $f(x)$在实数域上为可约，α 若不是实数，由上述可知 α 的共轭数$\overline{\alpha}$也是 $f(\alpha)$的根，且 $\alpha\neq\overline{\alpha}$，于是

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$$

为一实系数二次多项式，且整除 $f(x)$。从而

$$f(x)=[x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}]f_1(x),$$

此处 $f_1(x)$为$n-2$次的实系数多项式，这就说明 $f(x)$ 在实数域上是可约的。

从此便可得出，任一 n $(n\geqslant 1)$ 次实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上的标准分解式必为如下形式：

$$f(x)=a_0(x-c_1)^{l_1}\cdots(x-c_s)^{l_s}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots$$
$$\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r},$$

其中 c_1，…，c_s，p_1，…，p_r，q_1，…，q_r 全是实数，l_1，…，l_s，k_1，…，k_r是正整数，并且$x^2+p_ix+q_i(i=1, 2, \cdots, r)$是不可约的，即适合条件 $p_i^2-4q_i<0(i=1, 2, \cdots, r)$。

现在我们回头来讨论求实根的界的问题。

求实系数多项式$f(x)$的实根的界就是要求出两个实数M与N，$M<N$，使得 $f(x)$ 的实根全在区间(M, N)内。这时M叫做 $f(x)$的实根的一个下界，N叫做 $f(x)$ 的实根的一个上界。如果能求出这样的界来，对于求 $f(x)$ 的实根显然是有帮助的。

假定我们有一种办法能求出任意多项式的正根的上界，那么，我们也能用同样的办法求出这一多项式的正根的下界及负根的上、下界。

事实上，给了多项式 $f(x)$以后，我们同时考虑以下的多项式：

$$f_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right), f_2(x)=f(-x), f_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right).$$

求出这四个多项式的正根上界，设它们依次是

$$N, N_1, N_2, N_3$$

那么数$\frac{1}{N_1}$是$f(x)$的正根下界。因为若α是$f(x)$的正根，那么$\frac{1}{\alpha}$是$f_1(x)$的正根，于是由$\frac{1}{\alpha}<N_1$得$\alpha>\frac{1}{N_1}$。同理，数$-N_2$与$-\frac{1}{N_3}$各是$f(x)$的负根的下界与上界。这样，多项式$f(x)$的所有正根在区间

$$\left(\frac{1}{N_1}, N\right)$$

之内；所有负根在区间

$$\left(-N_2, -\frac{1}{N_3}\right),$$

之内，而其全部实根自然都在区间

$$(-N_2, N)$$

之内。

以下定理给出求多项式正根上界的一个方法。

定理 1 **设在实系数多项式**

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

中，$a_0>0$，a_m 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中第一个负系数，而 B 是一切负系数的绝对值中的最大数。

那么

$$N=1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$$

是 $f(x)$ 正根的一个上界。

证明 设

$$x>1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$$

由题设条件有

$$a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}\geqslant 0, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n\geqslant -B$$

所以

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{m-1}x^{n-m+1}+a_kx^{n-m}+\cdots$$
$$\cdots+a_n\geqslant a_0x^n-B(x^{n-m}+x^{n-m-1}+\cdots+1)=a_0x^n-$$
$$B\frac{x^{n-m+1}-1}{x-1}$$。但 $x>1$，所以

$$f(x)>a_0x^n-B\frac{x^{n-m+1}}{x-1}=\frac{x^{n-m+1}}{x-1}[a_0x^{m-1}(x-1)-B].$$

又由 $x>1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$，得

$$a_0x^{m-1}(x-1)-B>a_0(x-1)^m-B>0.$$

从此得出 $f(x)>0$。这样，凡大于$1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$的数不能是 $f(x)$ 的根，故 $N=1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}$是 $f(x)$ 的一个正根上界。

在这个定理中，假定了多项式 $f(x)$ 至少有某一系数$a_m(m>0)$是负的，没有这样系数的多项式我们不必加以考虑，因为它显然没有正根。

这一定理所给出的方法可以应用到首项系数是负数的多项式上去。因为，若是一个给定的多项式 $f(x)$ 的首项系数是负的，那么多项式$-f(x)$的首系数就是正的。但$f(x)$与$-f(x)$有相同的根。

例 1　设 $f(x)=2x^5+100x^2-5x-40$。于是

$$a_0=2,\ m=4,\ B=40.$$

按定理 1，$f(x)$ 的实根上界是

$$1+\sqrt[4]{\frac{B}{a_0}}=1+\sqrt[4]{\frac{40}{2}}\approx3.2.$$

在估计了一个实系数多项式的实根范围之后，进一步的问题自然是确定实根的个数（不计重数）。关于这个问题的最完整的结果是斯图姆（Sturm）给出的，按照斯图姆的方法，对于任意给定的区间$(a,\ b)$，我们可以确定一个多项式在这个区间内实根的个数，这样，一个实系数多项式的全部实根的个数当然也就能够确定。

下面就来介绍斯图姆方法。

设 $f(x)$ 为任一实系数多项式。可以假定它没有重根，否则可以把$f(x)$先除以它与它的导数的最大公因式。根据§5，这样得到的多项式没有重根，并且不计重数与 $f(x)$ 有相同的根。

首先，从$f(x)$出发作出一串多项式。

求出 $f(x)$的导式 $f'(x)$，令

$$f_0(x)=f(x),\ f_1(x)=f'(x).$$

由带余除法，用 $f'(x)$去除 $f(x)$，把余式乘以 -1后，取作 $f_2(x)$。再用这样取定的 $f_2(x)$ 去除 $f_1(x)$ 再把所得余式乘以 -1 后，取作 $f_3(x)$。如此继续下去，我们所用的步骤基本上无异于对多项式 $f(x)$ 与 $f'(x)$施行辗转相除法，只是每次都把所得的余式反号，并且用反了号的余式来进行下一步除法。因为对于求最大公因式来说，这种反号是没有关系的，所以用上述步骤最后仍会得出一个多项式 $f_s(x)$来，它就是 $f(x)$与 $f'(x)$ 的最大公因式。这样，我们得到以下一串多项式：

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_{s-1}(x),\ f_s(x), \qquad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} f_0(x)&=f_1(x)q_1(x)-f_2(x),\\ f_1(x)&=f_2(x)q_2(x)-f_3(x),\\ &\vdots\\ f_{k-1}(x)&=f_k(x)q_k(x)-f_{k+1}(x),\\ &\vdots\\ f_{s-2}(x)&=f_{s-1}(x)q_{s-1}(x)-f_s(x),\\ f_{s-1}(x)&=f_s(x)q_s(x). \end{aligned}$$

显然，$f_s(x)$ 是 $f_0(x)$ 与 $f_1(x)$的最大公因式。

多项式序列（1）叫做多项式 $f(x)$ 的斯图姆组。

为介绍斯图姆定理，先说明一个术语。

看一个不为零的实数序列：

$$c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k. \qquad (2)$$

如果其中某相邻两数的符号相反，就说序列（2）中出现一个变

号。序列（2）中出现的变号总数叫做（2）的变号数。例如，序列

$$1,\ -2,\ -3,\ 5,\ -4,\ 2$$

的变号数是4。

如果一个实数序列中含有等于零的数，那么这个序列的变号数指的是去掉零之后剩下的序列的变号数。例如，序列

$$1,\ 0,\ 3,\ 0,\ -2,\ 0,\ 1,\ -4,\ 0$$

的变号数指的是序列

$$1,\ 3,\ -2,\ 1,\ -4$$

的变号数，即变号数是3。

在多项式 $f(x)$ 的斯图姆组（1）中，把 x 代以实数 c，我们得到一个实数序列

$$f_0(c),\ f_1(c),\ \cdots,\ f_{s-1}(c),\ f_s(c).$$

这个序列的变号数叫做多项式 $f(x)$ 的斯图姆组在 $x=c$ 时的变号数，并用 $V(c)$ 来表示。

定理2（斯图姆定理） **设实系数多项式 $f(x)$ 没有重根，并且实数 a 与 $b(a<b)$ 都不是 $f(x)$ 的根，那么 $f(x)$ 在 a 与 b 之间的实根个数等于 $f(x)$ 的斯图姆组在 $x=a$ 与 $x=b$ 时的变号数的差 $V(a)-V(b)$。**

斯图姆定理的证明较复杂，这里我们不给出斯图姆定理的证明，只是通过例子来说明和熟习利用斯图姆定理确定实根个数的具体做法。

为了应用这一定理来求出多项式 $f(x)$ 的实根个数，我们可以分别取 $f(x)$ 的负根下界及正根上界作为 a 与 b。

通常我们采用下述简便方法，我们知道：当 $|x|$ 充分大时，$f(x)$ 的值与其首项 a_0x^n 的值有相同的符号。这样，总可以选取充分大的正数 N，使得 $f(x)$ 的实根都在 $-N$ 与 N 之间，并且当 $|x|\geqslant N$ 时，$f(x)$ 的斯图姆组的每一多项式都与它的首项有相同的符号。而对于这样的 N 来说，我们不必求出它的值来，就能很快的确定当

$x=\pm N$时，$f(x)$的斯图姆组的每一多项式的符号．当 $x=N$ 时，斯图姆组的每一多项式都与它的首项系数同号；当 $x=-N$ 时，斯图姆组内偶次多项式与其首项系数同号，而奇次多项式与其首项系数异号．这样的 $-N$ 与 N 我们约定分别用符号 $-\infty$ 与 ∞ 来表示．

利用斯图姆定理也可以分别求出 $f(x)$ 的负根个数与正根个数，这只须应用这一定理于区间$[-\infty, 0]$与$[0, \infty]$上．

应用施图姆定理于逐渐缩小的区间上，我们还能把多项式 $f(x)$ 的实根分离开，这就是说：能求得这样的闭区间$[a, b]$，使 $f(x)$在$[a, b]$内恰好有一个实根．这一点在应用上是很重要的．

例 2　求多项式

$$f(x)=x^5+2x^4-2x^3-8x^2+7x-3$$

的实根个数．

解　多项式 $f(x)$ 没有重根．这一点我们不必事先加以验证，因为在构成斯图姆组的过程中就可以看出 $f(x)$ 与其导数是否互质．

首先求出 $f(x)$ 的斯图姆组．为了避免分数系数，在作除法时可以用一个正数乘被除式或除式．这样做，就等于把斯图姆组的某些多项式乘以一些正数，这显然不会改变斯图姆组的变号数．（注意：用负数乘被除式或除式时会改变斯图姆组的变号数！所以是不允许的）我们得出：

$$f_0(x)=x^5+2x^4-2x^3-8x^2+7x-3,$$

$$f_1(x)=5x^4+8x^3-6x^2-16x+7,$$

$$f_2(x)=36x^3+108x^2-172x+89,$$

$$f_3(x)=-56x^2+89x-35,$$

$$f_4(x)=-24533x-161,$$

$$f_5(x)=1.$$

其次，为求出这组多项式当 $x=-\infty$，$x=0$ 和 $x=\infty$ 时的符号，列表如下：

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$V(x)$
$x=-\infty$	−	+	−	−	+	+	3
$x=0$	−	+	+	−	−	+	3
$x=\infty$	+	+	+	−	−	+	2

所以多项式 $f(x)$ 有一个正根，没有负根。

由定理 1 可知 4 是它的一个正根上界，故 $f(x)$ 的唯一的实根在 0 与 4 之间。

例 3　求多项式

$$f(x)=x^3+3x^2-1$$

的实根个数，并把根分离开。

解　$f(x)$ 的斯图姆组是

$$f_0(x)=x^3+3x^2-1,$$
$$f_1(x)=3x^2+6x,$$
$$f_2(x)=2x+1,$$
$$f_3=1.$$

容易算出，$V(-\infty)=3$，$V(0)=1$，$V(\infty)=0$，所以，$f(x)$ 有两个负根，一个正根，共三个实根。

按定理 1 可以算出，$f(x)$ 的负根下界与正根上界各是 -4 与2。于是可列表如下：

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$V(x)$
$x=-4$	−	+	−	+	3
$x=-3$	−	+	−	+	3
$x=-2$	+	0	−	+	2
$x=-1$	+	−	−	+	2
$x=0$	−	0	+	+	1
$x=1$	+	+	+	+	0
$x=2$	+	+	+	+	0

从表中可以看出，$f(x)$ 的三个根分别在区间

$$[-3, -2], [-1, 0], [0, 1]$$

内。

练　习　九

1．证明　奇次实系数多项式至少有一个实根。

2．求下列多项式根的上、下界：

（1）$x^4+4x^3-8x^2-10x+14$；

（2）$3x^4-2x^2+x-1$。

3．利用斯图姆组确定下列多项式实根的个数，并用相邻的整数把实根分离开：

（1）x^3+3x-5；

（2）x^4-x-1；

（3）$x^4+4x^3-12x+9$。

4．证明　n 次多项式之 n 个根皆为实单根的充要条件是它的斯图姆组由$n+1$个首项系数皆同号的多项式组成。

§10　有理系数多项式

关于有理系数多项式我们讨论两个问题：在有理数域上的可约性；有理根的求法。

首先讨论有理系数多项式在有理数域上的可约性。

我们已经知道：由代数基本定理，在复数域上每一个次数大于1的多项式都是可约的；而在实数域上每一个次数大于2的多项式都是可约的。对于有理数域上的多项式，问题要复杂得多。事实上，在有理数域上存在任意次数的不可约多项式，这是以下讨论的自然结果。

关于有理系数多项式的可约性，我们证明两个问题：有理系数

多项式在有理数域上的可约性归结为整系数多项式在整数环上的可约性和给出一个判断整系数多项式在整数环上是不可约的充分条件。

设 $f(x)$ 是任意有理系数多项式。若 $f(x)$ 的系数不全是整数，那么以 $f(x)$ 的系数的分母的最小公倍数 k 乘 $f(x)$，就得一个整系数多项式 $kf(x)$。显然，多项式 $f(x)$ 与 $kf(x)$ 在有理数域上同时可约或同时不可约。这样，讨论在有理数域上的可约性时，只需讨论整系数多项式的可约性。

定义　若一个整系数多项式 $f(x)$ 的系数互质，那么 $f(x)$ 叫做一个本原多项式。

关于本原多项式，以下的高斯（Gauss）引理成立。

引理　两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式。

证明　设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_mx^m,$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_jx^j+\cdots+b_nx^n$$

是任意两个本原多项式，它们的乘积

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{i+j}x^{i+j}+\cdots+c_{m+n}x^{m+n}.$$

如果 $f(x)g(x)$ 不是本原多项式，那么一定存在一个质数 p，它能整除所有系数 c_0，c_1，…，c_{m+n}。由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是本原多项式，所以 p 不能整除 $f(x)$ 的所有系数，也不能整除 $g(x)$ 的所有系数。令 a_i 与 b_j 各是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的第一个不能被 p 整除的系数，我们考察 $f(x)g(x)$ 的系数 c_{i+j}。有

$$c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+a_{i-2}b_{j+2}+\cdots+a_{i+1}b_{j-1}+a_{i+2}b_{j-2}+\cdots.$$

这个等式左端被 p 整除。根据选择 a_i 与 b_j 的条件，所有系数 a_{i-1}，a_{i-2}，…以及 b_{j-1}，b_{j-2}，…都能被 p 整除，因而等式右端除第一项外，其它每一项也都能被 p 整除。因此乘积 a_ib_j 也必须被 p 整除。由于 p 是一个质数，所以 p 必整除 a_i 或 b_j，这与假设矛盾。

由此可证我们的第一个问题。

定理1　设 $f(x)$ 为任一整系数多项式。那么，$f(x)$ 在有理

数域上可约当且仅当 $f(x)$ 在整数环上可约.

证明 如果$f(x)$在整数环上可约，显然，$f(x)$在有理数域上可约.

其次，设 $f(x)$ 在有理数域上可约，则有

$$f(x)=h_1(x)h_2(x),$$

这里 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 都是有理系数多项式，次数都低于 $f(x)$ 的次数.

令 $h_1(x)$ 的系数的公分母是 b_1，那么

$$h_1(x)=\frac{1}{b_1}g_1(x),$$

这里$g_1(x)$是一个整系数多项式. 又令 $g_1(x)$的系数的最大公约数为 a_1，那么

$$h_1(x)=\frac{a_1}{b_1}f_1(x),$$

而 $f_1(x)$ 是一个本原多项式. 同理，

$$h_2(x)=\frac{a_2}{b_2}f_2(x),$$

而 $f_2(x)$ 是一个本原多项式.

于是

$$f(x)=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}f_1(x)f_2(x)$$

$$=\frac{r}{s}f_1(x)f_2(x),$$

其中 r 与 s 是互质的整数，且 $s>0$，由于 $f(x)$ 是一个整系数多项式，所以多项式 $f_1(x)f_2(x)$ 的每一个系数与 r 的乘积都必须被 s 整除，但 r 与 s 互质，所以 $f_1(x)f_2(x)$ 的每一个系数必被 s 整除，这就是说：s 是多项式 $f_1(x)f_2(x)$ 的系数的一个公约数. 由引理，$f_1(x)f_2(x)$ 是一个本原多项式，因此，$s=1$，从而

$$f(x)=[rf_1(x)]\cdot f_2(x).$$

$rf_1(x)$ 和 $f_2(x)$显然各与 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 有相同的次数. 这样，$f(x)$ 可以分解成两个次数都低于它的整系数多项式的乘积，亦即 $f(x)$在

整数环上可约。

关于整系数多项式在整数环上的可约性，克郎奈克（Kronecker）曾给出一个判断方法。但是这个方法非常麻烦，几乎没有实用价值。下面我们介绍一个简单易行的判断整系数多项式为不可约的方法。

定理 2　（艾森斯坦因 Eisenstein 判断法）

设

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

是一个整系数多项式。若是能够找到一个质数 p，使

1. **首项系数 a_n 不能被 p 整除，**
2. **其余各项系数都能被 p 整除，**
3. **常数项 a_0 不能被 p^2 整除，**

那么多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证明　若 $f(x)$ 在有理数域上可约，那么由定理 1，$f(x)$ 可以分解成两个次数都低于 n 的整系数多项式的乘积：

$$f(x)=g(x)h(x),$$

这里

$$g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k,$$

$$h(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_lx^l,$$

并且 $k<n$，$l<n$，$k+l=n$，由此得出

$$a_0=b_0c_0$$

因为 a_0 被 p 整除，而 p 是一个质数，所以 b_0 或 c_0 被 p 整除，但 a_0 不能被 p^2 整除，所以 b_0 与 c_0 不能同时被 p 整除，不妨假定 b_0 被 p 整除而 c_0 不被 p 整除。$g(x)$ 的系数不可能全被 p 整除。否则 $f(x)=g(x)h(x)$ 的首项系数 $a_n=b_kc_l$ 将被 p 整除，这与假设矛盾。令 $g(x)$ 中第一个不能被 p 整除的系数是 b_s。考察等式

$$a_s=b_sc_0+b_{s-1}c_1+\cdots+b_0c_s.$$

由于在这个等式中 a_s，b_{s-1}，…，b_0 都被 p 整除，所以 b_sc_0 也必被 p 整除。但 p 是一个质数，所以 b_s 与 c_0 中至少有一个被 p 整

除。这是一个矛盾。

应用艾森斯坦因判断法很容易证明以下事实：

有理数域上有任意次的不可约多项式。

事实上，对任意的正整数 n，很容易写出满足定理 2 的条件的不可约多项式，例如，$f(x)=x^n+2$ 就是这样的一个多项式。

艾森斯坦因判断法不是对于所有整系数多项式都能够直接的应用，因为满足判断法中的条件的质数不总存在。若是对于某一多项式 $f(x)$ 找不到这样的质数 p，那么 $f(x)$ 可能是不可约的，也可能是可约的。例如，对于多项式 x^2+1 与 x^2+3x+2 来说，都不存在满足判断法的条件的质数，但显然前一个多项式是不可约的，而后一个多项式是可约的。

有时对于某一个多项式 $f(x)$ 来说，艾森斯坦因判断法不能直接应用，但是把 $f(x)$ 适当地变形后，就可以应用这个判断法。

例 1　令 p 为一质数，那么多项式

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$$

叫做分园多项式。我们证明，分园多项式在有理数域上不可约。在这里不能直接应用艾森斯坦因判断法。但是，如果令 $x=y+1$，那么由于 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$，我们得到

$$\begin{aligned} g(y)=f(y+1)&=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1} \\ &=\frac{y^p+c_1^p y^{p-1}+\cdots+c_{p-1}^p y}{y} \\ &=y^{p-1}+c_1^p y^{p-2}+\cdots+c_{p-1}^p. \end{aligned}$$

$g(y)$的首项系数不能被 p 整除。其余系数都是二项式系数，因而都是整数。它们都能被 p 整除。事实上，当 $i<p$时，

$$c_i^p=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i!}$$

的分母与 p 互质，所以分子中的 p 不可能被消去。但$g(y)$的常数项 $c_{p-1}^p=p$ 不能被 p^2 整除。于是，由艾森斯坦因判断法 $g(y)$ 在有理

数域上不可约。因此 $f(x)$ 在有理数域上也不可约。事实上，从

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$

就会得到

$$g(y)=f_1(y+1)f_2(y+1).$$

现在我们来讨论有理系数多项式的有理根问题。

与可约性的讨论一样，我们也可以限于讨论如何求整系数多项式的有理根．因为若是给定了一个有理系数多项式 $f(x)$，那么用系数分母的最小公倍数 k 乘 $f(x)$ 就得到一个整系数多项式 $kf(x)$，而 $f(x)$ 与 $kf(x)$ 显然有相同的根。

定理 3 **若有理数 $\frac{r}{s}\neq 0$，$(s,r)=1$，是整系数多项式**

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0a_n\neq 0$$

的根，那么 $r|a_n$，$s|a_0$。

证明　因 $\frac{r}{s}$ 是 $f(x)$ 的根，则

$$f\left(\frac{r}{s}\right)=a_0\left(\frac{r}{s}\right)^n+a_1\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

即

$$a_0r^n+a_1r^{n-1}s+\cdots+a_ns^n=0.$$

于是

$$a_0r^n=-(a_1r^{n-1}+\cdots+a_ns^{n-1})s.$$

由此，$s|a_0r^n$，再由 $(s,r)=1$ 可知 $(s,r^n)=1$．从此便得 $s|a_0$．同理 $r|a_n$。

推论 1 **设 $f(x)$ 为首系数是 1 的整系数多项式，那么 $f(x)$ 的有理根必为整数。**

推论 2 **设 $f(x)$ 为整系数多项式．c 为 $f(x)$ 的任一整数根，那么，c 必为 $f(x)$ 的常数项的约数。**

这两个推论都可由定理直接得出。

根据定理 3，我们得到一个求有理根的方法：

写出整数 a_0 与 a_n 的所有约数．以 a_0 的约数为分母，a_n 的约数

为分子得到有限个有理数．于是，如果 $f(x)$ 存在有理根，则必在这些有理数之中，因此，只需用这些有理数逐个试验便可。

例 2　求整系数多项式

$$f(x)=3x^4+5x^3+x^2+5x-2$$

的全部有理根．

解　$a_0=3$，$a_n=-2$。

-2的约数：1，-1，2，-2；

3 的约数：1，-1，3，-3。

于是需要检验的有理数：

$$1,\ -1,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ 2,\ -2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}.$$

则有

x	1	-1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	-2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$f(x)$	12	-8	0	$-\frac{100}{27}$	100	0	$\frac{104}{27}$	$-\frac{156}{27}$

所以，$f(x)$ 共有两个有理根：$\frac{1}{3}$ 与 -2。

由推论 2，欲求一个整系数多项式 $f(x)$ 的整数根，只须用常数项的约数来试验即可．当常数项的约数比较多时，逐个的拿来试验是很麻烦的．下面的事实能使验算简化些．

首先，1 与 -1永远是常数项的约数，而计算 $f(1)$ 与 $f(-1)$并不困难．另一方面，若整数 c（$c\neq\pm1$）是 $f(x)$ 的根，那么必有

$$f(x)=(x-c)q(x),$$

其中 $q(x)$ 必为一整系数多项式．因此商

$$\frac{f(1)}{c-1}=-q(1) \text{ 与 } \frac{f(-1)}{c+1}=-q(-1)$$

都应该是整数．这样，我们只需用常数项的那些使商$\frac{f(1)}{c-1}$与$\frac{f(-1)}{c+1}$都是整数的约数 c 来进行试验就够了。

例 3 求多项式

$$f(x)=x^3-2x^2-x-6$$

的有理根。

解 因为 $f(x)$ 的首项系数等于1，由推论1，$f(x)$ 的有理根必为整根，所以只求 $f(x)$ 的整数根即可。

常数项 -6 的约数：±1，±2，±3，±6。

我们先算出 $f(1)$ 与 $f(-1)$：

$$f(1)=-8,\ f(-1)=-8.$$

所以，1与 -1 都不是 $f(x)$ 的根。

其次，由于

$$\frac{-8}{2+1},\ \frac{-8}{-2-1},\ \frac{-8}{6-1},\ \frac{-8}{-6-1}$$

都不是整数，所以2，-2，6，-6 都不是 $f(x)$ 的根。但

$$\frac{-8}{3-1},\ \frac{-8}{3+1},\ \frac{-8}{-3-1},\ \frac{-8}{-3+1}$$

都是整数，所以约数3与 -3 在试验之列。再应用综合除法：

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 14 & -48 \end{array}$$

这说明3是 $f(x)$ 的一个根，-3 不是 $f(x)$ 的根。综上所述，原多项式只有一个有理根，且为整数根3。同时我们得到

$$f(x)=(x-3)(x^2+x+2).$$

容易看出3不是 x^2+x+2 的根。所以3不是 $f(x)$ 的重根。

从例2我们可以看出，用定理3的方法求有理根时，在试验过程中要碰到一些分数的运算，这当然是比较麻烦的。推论1与2说明：首项系数是1的整系数多项式的有理根都是整数，而检验整数根要方便些。下面事实说明：求任意整系数多项式的有理根的问题都可归结为求整数根的问题。

任一整系数多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

以 a_0^{n-1} 乘 $f(x)$，得

$$a_0^{n-1}f(x)=(a_0x)^n+a_1(a_0x)^{n-1}+a_0a_2(a_0x)^{n-2}+\cdots$$
$$+a_0^{n-2}a_{n-1}(a_0x)+a_0^{n-1}a_n.$$

在后一多项式中，令 $y=a_0x$，得到

$$g(y)=y^n+a_1y^{n-1}+a_0a_2y^{n-2}+\cdots+a_0^{n-2}a_{n-1}y+a_0^{n-1}a_n.$$

显然，把 $g(y)$ 的一切根都除以 a_0 后就得到 $f(x)$ 的一切根．特别地，把 $g(y)$的一切有理根都除以 a_0 后就得出 $f(x)$ 的一切有理根．但 $g(y)$ 的首项系数是 1，因此 $g(y)$ 的有理根只能是整数．这样，只需象例 3 那样，求出 $g(y)$ 的一切整数根，就能得到 $f(x)$ 的一切有理根．

例 4　用求整数根的方法求例 2 中多项式 $f(x)$ 的有理根．

解　用 3^3 乘 $f(x)$，并且令 $y=3x$，得

$$g(y)=y^4+5y^3+3y^2+45y-54.$$

我们求$g(y)$的整数根．

首先，计算 $g(1)$与 $g(-1)$：

$$g(1)=0,\ g(-1)=-100.$$

所以，1 是 $g(y)$ 的一个根．于是

$$g(y)=(y-1)h(y),$$

而　　$h(y)=y^3+6y^2+9y+54.$

再求$h(y)$的整数根．为此，我们用常数项54的约数来进行试验．但 $h(y)$ 的系数都是正数，所以，$h(y)$ 没有正根．因此，只须用常数项的负约数来试验就行了．

54的负约数：-1，-2，-3，-6，-9，-18，-27，-54．

而

$$h(1)=70,\ h(-1)=54.$$

对于每一个负约数 c 计算$\frac{h(1)}{c-1}$与$\frac{h(-1)}{c+1}$．我们发现：除了 $c=-6$外，其余的约数都不是 $h(y)$ 的根．这样，多项式 $g(y)$恰有

两个整数根：1与 -6，因而原多项式 $f(x)$ 恰好有两个有理根：$\frac{1}{3}$与 -2。

最后，利用有理根的性质作两个例题。

例 5 求证 $f(x)=x^3-3x+1$ 在有理数域上不可约。

证 因为 $f(x)$ 是三次的，所以如果可约必可分解为一个一次因式与一个二次因式的乘积。从而 $f(x)$ 必有有理根。因为 $f(x)$ 的首项系数与常数项都是1，所以其有理根必为整数 c，且 $c|1$，即 $c=\pm 1$，但 $f(\pm 1)\neq 0$，即 ± 1都不是 $f(x)$ 的根，故 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

例 6 证明$\sqrt{2}$是无理数。

证 若$\sqrt{2}$为有理数，则 x^2-2 有有理根，即$\sqrt{2}$。但 x^2-2 的常数项 -2的约数± 1，± 2都不是它的根，所以$\sqrt{2}$不是有理数，即$\sqrt{2}$为无理数。

练 习 十

1．判断下列多项式在有理数域上是否可约：

（1）x^2+1；　　（2）x^4+1；

（3）x^6+x^3+1；　　（4）$x^4-8x^3+12x^2+2$；

（5）x^p+px+1，p 为奇质数；

（6）$x^4+4kx+1$，k 为整数。

2．证明 如果既约分数$\frac{p}{q}$是整系数多项式 $f(x)$ 的根，则 $q-p|f(1)$，$q+p|f(-1)$。

3．设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果 $f(0)$，$f(1)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 不能有整数根。

4．设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$为整系数多项式，若 a_0、a_n 为奇数，且 $f(1)$与 $f(-1)$中至少有一个为奇数，则 $f(x)$ 没有有理根。

5．求下列多项式的有理根：

（1）$x^3-6x^2+15x-14$；

（2）$4x^3-7x^2-5x-1$；

（3）$x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$．

§11 部分分式

我们现在应用学过的多项式的整除理论，讨论把有理分式表示成部分分式的问题。

设

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m,$$

而 $g(x)\neq 0$，我们把形式为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m} \tag{1}$$

的式子叫做数域 F 上的有理分式。

在这里假定大家已经熟悉有理分式的有关概念，性质和运算方法。

如果有理分式（1）不是真分式，即$\deg f(x)\geqslant\deg g(x)$，那么利用带余除法，则有

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x).$$

其中或 $r(x)=0$或$\deg\ r(x)<\deg g(x)$。

于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

即有理分式（1）或者它就是一个整式，或者可以写成一个整式与一个真分式的和．这样，我们只需讨论真分式的分解问题。

我们把形式为

$$\frac{u(x)}{p^t(x)}$$

的分式，其中 $p(x)$ 是不可约多项式，而$\deg u(x)<\deg p(x)$，叫做**简单分式**。一些简单分式的和叫做**部分分式**。例如

$$\frac{1}{x-1},\quad \frac{x+1}{x^2+2},\quad \frac{1}{(x^2+2)^3}$$

都是实数域上的简单分式，而

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x^2+2)^3};\quad \frac{1}{x-1}+\frac{x+1}{x^2+2}+\frac{1}{(x^2+2)^3}$$

都是实数域上的部分分式。

下面的两个引理说明了分解有理分式为部分分式的可能性。

引理 1 设$\frac{f(x)}{g(x)}$是F上的有理分式。如果分母 $g(x)$ 可以写成两个互质多项式的乘积：

$$g(x)=g_1(x)g_2(x),\quad (g_1(x),\ g_2(x))=1,$$

那么$\frac{f(x)}{g(x)}$可以分解成。

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{v(x)}{g_1(x)}+\frac{u(x)}{g_2(x)}.$$

证明 由 $(g_1(x),\ g_2(x))=1$，可知存在两个多项式 $u_1(x)$ 与 $v_1(x)$，使

$$u_1(x)g_1(x)+v_1(x)g_2(x)=1.$$

两端乘以 $f(x)$ 即得

$$f(x)=f(x)u_1(x)g_1(x)+f(x)v_1(x)g_2(x).$$

令 $u(x)=f(x)u_1(x)$，$v(x)=f(x)v_1(x)$，则得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u(x)g_1(x)+v(x)g_2(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

$$=\frac{v(x)}{g_1(x)}+\frac{u(x)}{g_2(x)}.$$

引理 2 设 $p(x)$ 是F上不可约多项式，那么有理分式$\frac{f(x)}{p^s(x)}$ $(s\geqslant 1)$可以分解成

$$\frac{f(x)}{p^s(x)}=f_0(x)+\frac{f_1(x)}{p(x)}+\frac{f_2(x)}{p^2(x)}+\cdots+\frac{f_s(x)}{p^s(x)},$$

其中 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_s(x)$ 或者次数低于 $p(x)$的次数或者是零多项式。

证明　利用带余除法，用 $p(x)$ 除 $f(x)$ 得

$$f(x)=p(x)q_1(x)+f_s(x).$$

再用 $p(x)$除 $q_1(x)$，得

$$q_1(x)=p(x)q_2(x)+f_{s-1}(x).$$

这样继续作下去，直到

$$q_{s-1}(x)=p(x)f_0(x)+f_1(x).$$

把每一 $q_i(x)(i=s-1,\ s-2,\ \cdots,\ 1)$ 依次代入前一个等式，则得

$$f(x)=p^s(x)f_0(x)+p^{s-1}(x)f_1(x)+\cdots$$
$$+p(x)f_{s-1}(x)+f_s(x).$$

于是便得欲求的分解式：

$$\frac{f(x)}{p^s(x)}=f_0(x)+\frac{f_1(x)}{p(x)}+\frac{f_2(x)}{p^2(x)}+\cdots+\frac{f_s(x)}{p^s(x)}.$$

由以上两个引理，可证下面的分解定理。

定理　F 上的每个有理真分式都可表示成部分分式，即可以表示成一些简单分式的和。

证明　设$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是 F 上的任一有理真分式。

由因式分解定理，$g(x)$有标准分解式：

$$g(x)=b_0p_1^{s_1}(x)\cdots p_r^{s_r}(x).$$

应用引理 1，可得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u_1(x)}{b_0p_1^{s_1}(x)}+\cdots+\frac{u_r(x)}{p_r^{s_r}(x)}.$$

再应用引理 2，便可得到所要求的形式。

特别地，在复数域上，不可约多项式全是一次的，因之，简单分式必为如下形式：

$$\frac{k}{(x-c)^m},$$

其中 k，c 都是复数。

在实数域上，不可约多项式是一次或二次的，即 $x-c$ 或 x^2+px+q，$(p^2-4q<0)$ 这两种，因之，简单分式必为如下形式：

$$\frac{k}{(x-c)^m} \text{与} \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m},$$

其中 k，c，a，b，p，q 都是实数，$p^2-4q<0$。

在数学分析中，求有理函数的不定积分时，用到的就是实数域上的部分分式。

引理 1 与 2 实际上也给出求部分分式的方法。而根据定理，可以利用待定系数法来做。

例　在实数域上，把有理分式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^6-4x^5+11x^4-14x^3+18x^2-9x+15}{x^7-3x^6+7x^5-13x^4+16x^3-16x^2+12x-4}$$

分解成部分分式。

解　分母在实数域上的标准分解式为

$$g(x)=(x-1)^3(x^2+2)^2.$$

因为原有理分式为真分式，所以根据定理，可设

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}$$
$$+\frac{d_1x+e_1}{x^2+2}+\frac{d_2x+e_2}{(x^2+2)^2}.$$

以 $(x-1)^3(x^2+2)^2$ 乘等式两端，得

$$x^6-4x^5+11x^4-14x^3+18x^2-9x+15$$
$$=a(x-1)^2(x^2+2)^2+b(x-1)(x^2+2)^2+c(x^2+2)^2$$
$$+(d_1x+e_1)(x^2+2)(x-1)^3+(d_2x+e_2)(x-1)^3.$$

这里有七个待定的系数：a，b，c，d_1，e_1，d_2，e_2。所以需要从上式中找出七个关系式。为此

令 $x=1$，得 $18=9c$，故 $c=2$，

令 $x=0$，得 $15=4a-4b+4c-2e_1-e_2$。

令 $x=-1$，得 $72=36a-18b+9c+24d_1-24e_1+8d_2-8e_2$。

比较上式两端x^6的系数，可得

$$1=a+d_1,$$

比较 x^5，x^4，x 的系数，依次得

$$-4=-2a+b-3d_1+e_1.$$

$$11=5a-b+c+5d_1-3e_1+d_2.$$

$$-9=-8a+4b-2d_1+6e_1-d_2+3e_2.$$

从以上七个关系式解出：

$$a=1,\ b=-1,\ c=2,\ d_1=0,\ e_1=-1,\ d_2=0,\ e_2=3.$$

故所求分解式为

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{-1}{x^2+2}+\frac{3}{(x^2+2)^2}.$$

练　习　十　一

1. 在实数域上，把下列分式分解为部分分式：

（1）$\dfrac{3x+4}{x^2+3x+2}$；

（2）$\dfrac{3x-7}{(x-2)^3}$；

（3）$\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$；

（4）$\dfrac{5x^2-1}{(x^2+3)(x^2-2x+5)}$.

2. 设 a、b、c 互不相同，把

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

分解成部分分式。

3. 试求

$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和。

习 题 二

1．证明 如果 $(f(x),\ g(x))=1$，则

$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$。

2．证明 若 $f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_s(x)$ 两两互质，且

$f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$

$g_i(x)=\frac{f(x)}{f_i(x)}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$

则存在 $h_1(x),\ h_2(x),\ \cdots,\ h_s(x)$ 使

$g_1(x)h_1(x)+g_2(x)h_2(x)+\cdots+g_s(x)h_s(x)=1$。

3．证明 次数大于0的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意多项式$g(x)$必有$(f(x),\ g(x))=1$或者对于某一正整数m，$f(x)|g^m(x)$。

4．证明 次数大于零的多项式 $f(x)$ 是某一个不可约多项式的方幂的充分必要条件是：对任意多项式$g(x)$,$h(x)$，由$f(x)$整除$g(x)h(x)$可以推出：

$f(x)|g(x)$ 或者 $f(x)|h^m(x)$（m为某一正整数）。

5．设 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 $k(k>1)$重因式，证明$x-a$也是 $g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$的 k 重因式。当 $k=1$ 时，此命题对否？说明理由。

6．设 $p(x)$是$f(x)$的导数 $f'(x)$的$k-1$重因式，能否断定$p(x)$是 $f(x)$ 的 k 重因式？

7．试决定 a、b，使 $(x-1)^2|ax^4+bx^3+1$。

8．若 $\forall\ c\neq0$，都有 $f(x)=f(x-c)$。求证 $f(x)$为常数。

9．证明 x^n-1能被x^d-1整除的充分必要条件是 $d|n$。

10．证明 若 $f(x)|f(x^n)$ 则 $f(x)$ 的根只能是0或单位根。

11．若 $p(x)$ 为实数域上的不可约多项式，$f(x)$ 为实数域上任

意多项式，并设 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在复数域上有公根 α。证明 $p(x)|f(x)$。

12. 利用斯图姆定理讨论实系数多项式 x^3+px+q 的根。

13. 设 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$. 证明：当 n 为奇数时，$f(x)$ 恰有一个实根。当 n 为偶数时，$f(x)$ 没有实根。

14. 证明：对于任意 k，$k\neq -1$，多项式

$$(x-2)(x-5)(x-7)(x-9)+$$
$$+k(x-3)(x-6)(x-8)(x-10)$$

有四个互异实根，把这些实根分离开来。

15. 已知 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 为整系数多项式，且 $bd+cd$ 是奇数，证明：$f(x)$ 在有理数域上不可约。

第三章　多元多项式

前面讨论了一元多项式，但是，有些问题还涉及多元多项式．本章将介绍多元多项式的概念，对称多项式及其应用．

§1　多元多项式的定义及运算

我们还是以给定的数域 F 为基础．用文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表 n 个可运算的符号，或称 n 个未定元．

我们把形如

$$ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$$

的式子叫做 F 上的一个 n 元单项式．其中 a 是 F 中的数，叫做该单项式的系数；$l_1, l_2, \cdots, l_n$ 都是非负整数，$l_1+l_2+\cdots+l_n$ 叫做该单项式的次数．

F 上的两个单项式 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 与 $bx_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n}$，如果 $l_1=s_1$，$l_2=s_2$，$\cdots$，$l_n=s_n$ 则称这两个单项式是同类的．显然同类的单项式必有相同的次数，但反之则未必．

定义1　设 $a_1x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}, a_2x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}, \cdots, a_tx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 为 F 上互不同类的一些单项式，我们把如下的式子：

$$a_1x_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}+a_2x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}+\cdots+a_tx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} \quad (1)$$

叫做 F 上的一个 n 元多项式，其中每一单项式叫做（1）的项，系数不为零的项的最大次数叫做多项式（1）的次数．系数全是零的多项式叫做零多项式，记作 0，对零多项式不定义次数．通常用 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots$ 表示 n 元多项式，或者就简单的记作 f，g，$\cdots$等．

为了书写方便，我们约定：

1．系数是零的项可以略去不写；

2．系数是 1 的项的系数可以略去不写；

3．对每一文字 x_i，都令 $x_i^0=1$，而且可以略去不写；特别地，记 $x_1^0x_2^0\cdots x_n^0=1$。

例如，二元多项式

$$f(x_1,x_2)=2x_1x_2^0+0x_1^2x_2+1\cdot x_1x_2+1\cdot x_1^0x_2^0$$

就可简记为

$$f(x_1,x_2)=2x_1+x_1x_2+1.$$

定义 2 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 F 上的任二n元多项式．如果f_1与f_2所有的同类项的系数全相等，则称f_1与 f_2 相等．记作$f_1=f_2$。

根据这个定义，在 n 元多项式的表达式（1）中各项的先后次序可任意调动，即允许按任何次序写出多项式的各个项。

下面我们来定义 n 元多项式的加法和乘法。

定义 3 任给 F 上的两个 n 元多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Sigma a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}, \tag{2}$$

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Sigma b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}. \tag{3}$$

我们称 n 元多项式

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Sigma(a_{k_1k_2\cdots k_n}+b_{k_1k_2\cdots k_n})x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

为f与g的和，记作

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=h(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

求和的方法叫做加法。

为了定义 n 元多项式的乘法，我们先来规定两个单项式的乘法．设

$$ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},$$

$$bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}.$$

为任二单项式．把单项式

$$abx_1^{i_1+j_1}x_2^{i_2+j_2}\cdots x_n^{i_n+j_n}.$$

叫做 $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ 与 $bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\cdots x_n^{j_n}$ 的积。

定义 4 对给定的两个 n 元多项式（2）与（3）按以下方法可以得到一个 n 元多项式：用（2）的每一项（单项式）与（3）的任何一项（单项式）相乘得一些积（单项式），把这样得到的全部单项式加起来得到一个多项式．这个多项式叫做多项式（2）与（3）的积。记作：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

求两个多项式积的方法叫做乘法。

我们知道一元多项式有两种自然的书写方法，一种是从次数较低的项写起，依次写出次数较高的项，即所谓升幂写法；另一种是从次数较高的项写起，依次写出次数较低的项，即所谓降幂写法。我们看到，这两种写法在许多问题的讨论上是很方便的．同样地，我们也需要对多元多项式的项规定一个先后次序，从而使多元多项式有一个相应地书写方法，以便于问题的讨论。但是与一元多项式的情况不同，我们并不能对多元多项式的项按其次数规定一个先后次序，这是因为有相同次数的项可能不只一项（如 $x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1^3$, x_2^3 都是次数等于 3 的项），这样，仅按次数就不能区别它们的先后次序．然而，我们可以模仿字典的排列原则，从而对多元多项式的项给出一个区别先后次序的方法．因此，把这种排列项的先后次序的方法也叫做字典排列法。

这种方法是这样的，对于任意单项式

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

都唯一地确定一个 n 元数组

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n),$$

我们把它叫做单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的指数组。显然，不同类的单项式所对应的指数组也不同。因此，只要我们能够对 n 元数组按排一个适当的先后次序，相应地就能对任二单项式按排先后次序。

设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 与 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 为两个不同的 n 元数组．如果在数列

$$k_1-l_1, k_2-l_2, \cdots, k_n-l_n$$

中第一个不等于零的数是一个正数，换句话说：若是存在这样的一个 i，使得

$$k_1-l_1=0, k_2-l_2=0, \cdots, k_{i-1}-l_{i-1}=0, k_i-l_i>0.$$

我们就说$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 先于 $(l_1,l_2,\cdots,l_n)$，记作：

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)>(l_1,l_2,\cdots,l_n).$$

容易知道，对 n 元数组规定的这种先于关系“$>$”有以下性质：

1）对任二 n 元数组 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$与$(l_1,l_2,\cdots,l_n)$ 以下三种关系有且仅有一个成立：

$$(k_1,\cdots,k_n)=(l_1,\cdots,l_n),$$

$$(k_1,\cdots,k_n)>(l_1,\cdots,l_n),$$

$$(l_1,\cdots,l_n)>(k_1,\cdots,k_n).$$

2）传递性：若

$$(k_1,\cdots,k_n)>(l_1,\cdots,l_n)$$

$$(l_1,\cdots,l_n)>(s_1,\cdots,s_n)$$

那么

$$(k_1,\cdots,k_n)>(s_1,\cdots,s_n)$$

这样，相应地就可对任二不同类的单项式按排先后次序了。如果单项式$ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$的指数组先于$bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$的指数组，我们就说单项式 $ax_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ 高于 $bx_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}$。于是只要把两项中较高的一项写在前边，$n$ 元多项式$f(x_1,\cdots,x_n)$就有了一个确定写法。

例如，多项式

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2^2x_3^2+x_1^2x_3+x_1^3$$

按字典排列法写出来就是

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_1^2x_3+2x_1x_2^2x_3^2.$$

我们看到：把一个多项式按字典排列法写出后，次数较高的项，并不见得一定排在前面。

在一个按字典排列法写出的多项式中，前面第一个系数不为零

的项叫做这一多项式的首项．关于首项我们有以下定理，这一定理在下一节里要用到．

定理 1 当$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$, $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$时，乘积$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项等于$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项的乘积．

证明　设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项分别为

$$ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n},\quad bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$$

其中$a\neq 0$，$b\neq 0$，为了证明它们的乘积

$$abx_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}$$

为$f\ g$的首项，只要证明它的指数组

$$(p_1+q_1,\ p_2+q_2,\ \cdots,\ p_n+q_n)$$

先于乘积$f\ g$中其它各项的指数组就行了．事实上，$f\ g$中其它各项的指数组是

$$(p_1+k_1,\ p_2+k_2,\ \cdots,\ p_n+k_n)$$

或者

$$(l_1+q_1,\ l_2+q_2,\ \cdots,\ l_n+q_n)$$

或者

$$(l_1+k_1,\ l_2+k_2,\ \cdots,\ l_n+k_n),$$

由

$$(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n)>(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n),$$
$$(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n)>(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n).$$

得

$$(p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_n+q_n)$$
$$>(p_1+k_1,p_2+k_2,\cdots,\ p_n+k_n)$$
$$(p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_n+q_n)$$
$$>(l_1+q_1,l_2+q_2,\cdots,l_n+q_n)$$

是明显的．

同样有

$$(l_1+q_1,\ l_2+q_2,\ \cdots,\ l_n+q_n)$$
$$>(l_1+k_1,\ l_2+k_2,\ \cdots,\ l_n+k_n),$$

由传递性即得

$$(p_1+q_1,p_2+q_2,\cdots,p_n+q_n)$$
$$>(l_1+k_1,l_2+k_2,\cdots,l_n+k_n).$$

这就证明了 $abx_1^{p_1+q_1}x_2^{p_2+q_2}\cdots x_n^{p_n+q_n}$ 高于其它各项．因此，它是首项．

推论 如果 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，那么 $fg\neq 0$．

定理 2 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是m次多项式，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是l次多项式，则

（1）$f+g$的次数不大于m与l中较大的数；

（2）若f是m次齐次式（即f的每一单项式都是m次的），而g是l次齐次式，则fg是$m+l$次齐次式；

（3）fg的次数等于$m+l$．

证明（1）与（2）是显然的．为了证明（3）成立，我们把$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$写成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=0}^{m}f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\text{其中}f_i(x_1,x_2,\cdots,$$

$x_n)$是 i 次齐次多项式．我们把它叫做 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 i 次齐次成分．显然，任意次数的多项式都能唯一的写成这种形式．

如果 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=0}^{l}g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中$g_j(x_1,x_2,\cdots,$

$x_n)$是 j 次齐次多项式．那么乘积

$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 s 次齐次成分是

$$h_s(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i+j=s}f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_j(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

特别地，$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的最高次齐次成分为

$$h_{m+l}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)g_l(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

由此可见，f 与 g 的乘积 h 的次数等于$m+l$．

此外，前一章第一节中对于一元多项式讨论的所有性质对于 n 元多项式来说也都成立。这里不再重述了。

练　习　一

1．试按字典排列法，排出下列多项式的项：

（1）$5x_4^5x_3x_1+x_5x_2^3-x_1^2x_4^5+x_2x_1^7+x_3^6$。

（2）$x_1x_2x_3^2+x_1x_3^3x_4^3+x_1x_2^7-x_2^3$。

2．设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，证明：存在数组 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)\neq 0$。

3．设 f 和 g 是 F 上的非零 n 元多项式，证明：如果 $f\cdot g$ 是单项式，则 f 与 g 都为单项式。

§ 2　对称多项式

对称多项式是多元多项式中的一种特殊类型，它的来源之一及应用的主要方面是一元多项式根的研究。因此，我们从一元多项式的根与系数的关系说起。

设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n。$$

是 F 上的一个多项式。如果α_1，$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 $f(x)$的 n 个根，那么由韦达公式，则有

$$-a_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$-a_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{n-1}a_{n-1}=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n,$$

$$(-1)^na_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

这里我们看到：系数对称地依赖于 n 个根。一般地，以下 n 个

n元多项式：

$$\begin{aligned}&\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\&\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\sigma_{n-1}=x_1\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2\cdots x_n,\\&\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n.\end{aligned}\tag{1}$$

就是对称地依赖于n个文字$x_1,x_2,\cdots,x_n$的。

为了便于以下讨论，我们首先需要把"对称"的意思说清楚。

定义 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为一n元多项式，$i_1,i_2,\cdots,i_n$是1，2，$\cdots$，n的任一排列。如果

$f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是对称多项式。换句话说：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不因文字的排列方法不同而不同。

例如 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_1^2x_3+x_3^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_2$.

就是一个三元对称多项式。

再有（1）中的每个都是n元对称多项式，把它们叫做初等对称多项式。

根据定义，若是对称多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$含有形如

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

的项，那么$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也必含有一切形如

$$ax_1^{k_{i_1}}x_2^{k_{i_2}}\cdots x_n^{k_{i_n}}$$

的项。此处指数$k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_n}$是指数组$k_1,k_2,\cdots,k_n$的任意一种排列。

不难看出，对称多项式的和与积仍是对称多项式；对称多项式的多项式也还是对称多项式，这就是说：如果$f_1,f_2,\cdots,f_m$都是关于$x_1,x_2,\cdots,x_n$的对称多项式，而$g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$是任一多项式，那么

$$g(f_1,f_2,\cdots,f_m)=k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

是关于x_1，x_2，…，x_n的n元对称多项式。

特别地，初等对称多项式的多项式还是对称多项式。反之亦然：每一对称多项式都可写成初等对称多项式的多项式。即有

定理 对于F上任意一个n元对称多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，都存在F上的一个n元多项式$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$$

并且这样的$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$只有一个。

证明 首先证明这样的$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是存在的。

设对称多项式$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的首项为

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},\quad a\neq 0 \tag{2}$$

我们指出：作为对称多项式首项，其指数组必定满足以下不等式：

$$k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_n$$

否则，就一定有某一个i，使$k_i<k_{i+1}$。这样，对称多项式f中也一定含有项

$$ax_1^{k_1}\cdots x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}\cdots x_n^{k_n}$$

显然，这一项高于项（2），这与（2）是f的首项的假定矛盾。

现在我们作一个初等对称多项式σ_1，σ_2，…，σ_n的单项式：

$$g_1=a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$$

g_1是x_1，x_2，…，x_n的对称多项式，它的首项是

$$ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2\cdots x_n)^{k_n}$$
$$=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},$$

即与f的首项相同。

由f减去g_1，两个首项互相消去。因而

$$f_1=f-g_1$$

的首项低于f的首项，并且f_1仍是对称多项式。

对f_1重复施行上述消去首项的方法，我们得到对称多项式

$$f_2=f_1-g_2,$$

其中g_2也是$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的一个单项式，而$f_2$的首项低于$f_1$的首项。

如此继续作下去，对于某一个s，我们将得到$f_s=0$。事实

上，设

$$bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} \tag{3}$$

是某一f_i的首项。由于f_i是对称多项式，所以必有类似的不等式：

$$l_1 \geqslant l_2 \geqslant \cdots \geqslant l_n, \tag{4}$$

另一方面，项（3）当然低于f的首项，因而

$$k_1 \geqslant l_1. \tag{5}$$

因为k_1是一个确定的非负整数，所以同时满足不等式（4）与（5）的指数组$(l_1, l_2, \cdots, l_n)$只能有有限多个。因此，也只能有有限个对称多项式f_i不等于零，从而必有某一个s，使$f_s = 0$。这样，我们得到一串等式：

$$f_1 = f - g_1,$$

$$f_2 = f_1 - g_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{s-1} = f_{s-2} - g_{s-1}$$

$$0 = f_{s-1} - g_s.$$

把它们加起来，我们得到

$$f = g_1 + g_2 + \cdots + g_s.$$

其中每个g_i都是初等对称多项式$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的单项式，即$f$可以写成$\sigma_1$，$\sigma_2$，…，$\sigma_n$的多项式，这也就证明了$g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$的存在性。

再来证明这样的g只有一个。这就是说：如果$h(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$那么必有：

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \neq g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n).$$

为此，我们这样考虑，令$h - g = u$，于是去证：

若$u(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$，则$u(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \neq 0$就行了。设

$$u(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = \sum b_{k_1 k_2 \cdots k_n} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n} \tag{6}$$

我们知道

$$b_{k_1 k_2 \cdots k_n} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \cdots \sigma_n^{k_n}$$

的首项为

$$b_{k_1k_2\cdots k_n}(x_1)^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{k_n}$$
$$=b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1+k_2+\cdots+k_n}x_2^{k_2+\cdots+k_n}\cdots x_n^{k_n} \qquad (7)$$

不难看出，当$(k_1,k_2,\cdots,k_n)\neq(l_1,l_2,\cdots,l_n)$时，必有

$(k_1+k_2+\cdots+k_n,k_2+\cdots+k_n,\cdots,k_n)\neq(l_1+l_2+\cdots+l_n,l_2+\cdots+l_n,\cdots,l_n)$.

这说明（6）中不同类的项所对应的首项也不同类．因此，这些首项彼此不能相消．显然，它们与$u(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$中的其它各项也不能相消．从而只要$u(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq0$必有$u(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\neq0$，定理证完．

这个定理叫做对称多项式基本定理．定理的证明过程就是把一个对称多项式具体表示成初等对称多项式的多项式的过程．

例1　把三元对称多项式　$x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 表为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式．

解　$x_1^3+x_2^3+x_3^3$的首项为x_1^3，它的指数组为（3,0,0），而

$$g_1=\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3.$$

于是

$$f_1=f-g_1=x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3$$
$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3-(x_1+x_2+x_3)^3$$
$$=-3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)$$
$$-6x_1x_2x_3.$$

f_1 的首项是$-3x_1^2x_2$，指数组是（2，1，0），而

$$g_2=-3\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=-3\sigma_1\sigma_2.$$

于是

$$f_2=f_1-g_2$$
$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2$$
$$=3x_1x_2x_3$$
$$=3\sigma_3.$$

至此便得

$$f = g_1 + g_2 + f_2$$
$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

注意：该例还可由下法求出g_3。因为f_2的首项指数组为（1,1,1）,所以

$$g_3 = 3\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1 = 3\sigma_3$$

于是

$$f_3 = f_2 - g_3 = 0$$

即

$$f_2 = g_3$$

故

$$f = g_1 + g_2 + g_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

对于较复杂的例子，用待定系数法比较方便．我们通过例题来说明这种方法。先引用一个记号，设$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$是一个单项式。我们用记号

$$\Sigma ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

表示由 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 经过文字 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一切排列所得的一切不同的项的和．这样得到的多项式显然必为对称的，而且是齐次的。例如

$$\Sigma x_1^2 = \Sigma x_1^2x_2^0\cdots x_n^0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$
$$\Sigma x_1^2x_2 = \Sigma x_1^2x_2x_3^0\cdots x_n^0 = x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n^2.$$
$$\Sigma x_1x_2\cdots x_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

例 2　把对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \Sigma x_1^2x_2^2$表示成$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的多项式。

解　由前面定理的证明我们知道，所求的表示式的项g_i完全决定于 f ,f_1,…的首项，而这些首项必须满足以下条件：

1）每一f_i的首项都低于f的首项，并且若$i>j$，那么f_i的首项低于f_j的首项；

2）每一首项的指数组$k_1,k_2,\cdots,k_n$满足：$k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_n$；

3）每一首项的次数都等于 4 （在这个例子里 f 是一个四次齐

次式，因而每一f_i也是一个四次齐次式）。

从f的首项指数组开始，写出满足上述条件的一切可能的指数组，以及对应的g_i，这样我们可列表如下：

指 数 组	g_i
2 2 0 0 …	$g_1=\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=\sigma_2^2$
2 1 1 0 …	$g_2=a\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=a\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 …	$g_3=b\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}=b\sigma_4$

这样，多项式f可以写成g_i的和：

$$f=g_1+g_2+g_3=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4.$$

为了决定系数a与b，我们用以下方法。

先取$x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=\cdots=x_n=0$。对于这一组数，f的值等于3，而σ_1，σ_2，σ_3，σ_4的值各为3，3，1，0。所以

$$3=9+a\cdot 3\cdot 1+b\cdot 0$$

从而$a=-2$。

再取$x_1=x_2=x_3=x_4=1, x_5=\cdots=x_n=0$。这时$f$的值等于6，而$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3$，$\sigma_4$的值分别为4，6，4，1。所以

$$6=36-2\cdot 4\cdot 4+b\cdot 1$$

从而$b=2$。于是，我们得到

$$f=\Sigma x_1^2x_2^2=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

如果给定的对称多项式f不是齐次多项式，那么，就要先把f写成一些齐次成份的和。这些齐次成份显然都是对称的，这样就可以对每一齐次成份应用上面所指出的方法。

推论 设F上首项系数为1的一元多项式$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$。并设$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$为$f(x)$的$n$个根。这时$F$上的任意对称多项式$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在$x_i=\alpha_i(i=1, 2\cdots, n)$时的值$g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$均为$F$中的数。

证明　根据定理，将$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表为F上的$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$的多项式，不妨设为

$$g(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)=A_1\sigma_1^{k_1}\cdots\sigma_n^{k_n}+\cdots+A_t\sigma_1^{l_1}\cdots\sigma_n^{l_n}$$ 其中

$A_1,\cdots,A_t$为F中数。于是，由韦达公式有

$$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\pm A_1a_1^{k_1}\cdots a_n^{k_n}\pm\cdots\pm A_ta_1^{l_1}\cdots a_n^{l_n}$$

因为A_1，$A_2,\cdots,A_t,a_1$，$a_2,\cdots,a_n$都是F中数，所以$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$必为F中的数。

做为对称多项式的一个应用，我们在这里给出n次多项式的判别式。

设复数域上的一元多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的n个根为x_1，$x_2,\cdots,x_n$。作差积的平方：

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i>j}(x_i-x_j)^2.$$

显然$f(x)$有重根的充分必要条件是$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，如何计算$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值呢？我们把$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$看成是n个文字$x_1,x_2,\cdots,x_n$的多项式，易知它是对称多项式。根据对称多项式基本定理，有

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{D}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$$

因为$x_1,x_2,\cdots,x_n$是$f(x)$的n个根，所以，由韦达公式可知。

$$\sigma_1=-a_1,\sigma_2=a_2,\cdots,\sigma_n=(-1)^na_n.$$

于是

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\overline{D}(-a_1,a_2,\cdots,(-1)^na_n)$$
$$=D^*(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

由推论知

$$D^*(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

是一个复数。当$D^*(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$时，$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$。我们把$D^*(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为多项式$f(x)$的判别式。

例 3　求$f(x)=x^2+a_1x+a_2$的判别式。

解 设$f(x)$在复数域上的两个根为x_1，x_2。则

$$D=(x_2-x_1)^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$$

应用待定系数法将D表成关于σ_1，σ_2的多项式．由于

指 数 组	g_i
2　0	$g_1=\sigma_1{}^{2-0}=\sigma_1{}^2$
1　1	$g_2=\sigma_1{}^{1-1}\sigma_2{}^{1-0}=\sigma_2$

于是

$$D=\sigma_1^2+a\sigma_2=(x_1+x_2)^2+a(x_1x_2)$$

取$x_1=x_2=1$，代入上式，得$a=-4$．所以

$$D=\sigma_1^2-4\sigma_2$$

再由韦达公式有，$\sigma_1=-a_1$，$\sigma_2=a_2$，故

$$D'=a_1^2-4a_2.$$

练 习 二

1．已知关于x_1，x_2，x_3，x_4，x_5的对称多项式f中，含有项：$3x_1x_2^3x_3^2x_4$，是否一定含有下列各项？并述理由．

（1）$3x_1x_5^3x_3^2x_4$；　　（2）$5x_1x_5^3x_3^2x_4$；

（3）$3x_1x_2^2x_3^3x_4$；　　（4）$3x_1^3x_2^2x_3$．

2．写出关于x_1，x_2，x_3的三次齐次的对称多项式．

3．$\sigma_1^3\sigma_2^5\sigma_3^7$是否是关于$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的对称多项式？其首项为何？

4．将下列对称多项式用初等对称多项式表示出来．

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=\Sigma x_1^2x_2$，

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$，

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$。

5．设 a_1，a_2，a_3 是方程

$$5x^3-6x^2+7x-8=0$$

的三个根，计算

$$(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)(a_2^2+a_2a_3+a_3^2)(a_1^2+a_1a_3+a_3^2)$$

的值。

§ 3　分母有理化

做为对称多项式的一个应用，我们来介绍分母有理化的方法．大家都知道：在计算分数时，常常需要把分数的分母化为有理数．这个过程，中学代数里叫做分母有理化．对于较简单的分数，例如：

$$\frac{7}{\sqrt{2}},\quad \frac{5}{1+\sqrt{3}},\quad \frac{3}{1+i}$$

等等，很容易将它们有理化．但是对于较复杂的分数，例如：

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}}$$

的分母如何有理化，需要很高的技巧．因而有必要给出一个方法，利用它可以按步骤，将分数的分母有理化．对称多项式的理论可以提供这样一个方法，虽然它还不能彻底解决我们的问题，但它适用于相当广泛的一类分数．

定理　设 $g(x)\neq 0$ 是有理数域 Q 上的多项式，而 α 为 Q 上 n 次多项式

$$f(x)=x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_n$$

的根，如果 $f(x)$ 的 n 个根都不是 $g(x)$ 的根，则可将分数

$$\frac{1}{g(\alpha)}$$

的分母有理化．

证明　设$f(x)$的 n 个根为$\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$。把

$$\frac{1}{g(\alpha)}$$

的分子分母同乘以 $g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$，得

$$\frac{1}{g(\alpha)}=\frac{g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}$$

这时，$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$ 是Q上 n 元多项式 $g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$在 $x_i=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$时的值。而 $g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$显然是对称多项式，故由上节推论可知 $g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$ 为Q中的数。即有理数。证明完了。

有了这个定理，我们自然会想到：如果有一个方法，在不知道$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的情况下，可将 $g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$计算出来，那么把分数

$$\frac{1}{g(\alpha)}$$

的分子分母同乘以 $g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$之后，就得到与$\frac{1}{g(\alpha)}$相等的分母为有理数的分数

$$\frac{g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}{g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)}.$$

下面就来指出这样的方法。因为已知$\alpha_1=\alpha$为$f(x)$的根。用$x-\alpha$除$f(x)$得

$$f(x)=(x-\alpha)q(x),$$

其中

$$q(x)=x^{n-1}-b_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1}$$

由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$f(x)$的 n 个根，所以$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$,为$q(x)$的$n-1$个根。面$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$是$n-1$元对称多项式$g(x_2)\cdots g(x_n)$在 $x_i=\alpha_i$ $(i=2,\cdots,n)$ 时的值，故由上节推论的证明过程知，可将 $g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$表为$b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$的多项式。这样，就在不知道$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的情况下算出了$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$。

归纳以上的讨论，要把 $\frac{1}{g(\alpha)}$ 的分母有理化，可按下列步骤进行：

1）先确定$g(x)$，使$x=\alpha$时，$g(\alpha)$为已知的分母；

2）找出以α为根的有理系数多项式$f(x)$，并且使$f(x)$的所有的根都不是$g(x)$的根；

3）以$x-\alpha$除$f(x)$，算出商式

$$q(x)=x^{n-1}-b_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1};$$

4）将$n-1$元对称多项式$g(x_2)\cdots g(x_n)$化为$\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma'_{n-1}$的多项式$\varphi(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma'_{n-1})$，这里$\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma'_{n-1}$为$x_2$，$x_3$，$\cdots$，$x_n$的初等对称多项式。然后，再用$b_i$代替$\sigma_i'$得

$$\varphi(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma'_{n-1})=\varphi(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$$
$$=g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$$

这里$\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$q(x)$的根。

5）用$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$同时乘$\frac{1}{g(\alpha)}$的分子、分母便实现了分母有理化。

例1　将分数

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}$$

分母有理化。

解1）当取$\alpha=\sqrt[3]{2}$时，则有

$$g(x)=x^2+3x+1$$

使得$g(\alpha)$之值为原分数的分母。

2）以$\alpha=\sqrt[3]{2}$为根的多项式为

$$f(x)=x^3-2$$

它是这样求出的：令

$$x=\sqrt[3]{2}$$

两边立方得

$$x^3=2$$

从而知

$$x^3-2$$

必以$\sqrt[3]{2}$为根。

3）用综合除法求出以$x-\sqrt[3]{2}$除$f(x)$的商式：

$$\begin{array}{r|rrrr} \sqrt[3]{2} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & \sqrt[3]{2} & (\sqrt[3]{2})^2 & 0 \end{array}$$

商式为

$$q(x)=x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}$$

4）求$g(\alpha_2)g(\alpha_3)$之值，因为

$$g(\alpha_2)g(\alpha_3)=(\alpha_2^2+3\alpha_2+1)(\alpha_3^2+3\alpha_3+1)$$

是关于α_2，α_3的对称多项式，可用关于α_2，α_3的初等对称多项式

$$\sigma_1'=b_1=-\sqrt[3]{2}=\alpha_2+\alpha_3$$

$$\sigma_2'=b_2=\sqrt[3]{4}=\alpha_2\cdot\alpha_3$$

表出，即

$$\begin{aligned} g(\alpha_2)g(\alpha_3)&=\alpha_2^2\alpha_3^2+3(\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2)+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\\ &\quad+9\alpha_2\alpha_3+3(\alpha_2+\alpha_3)+1\\ &=(\alpha_2\alpha_3)^2+3\alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_2+\alpha_3)^2\\ &\quad-2\alpha_2\alpha_3+9(\alpha_2\alpha_3)+3(\alpha_2+\alpha_3)+1\\ &=\sigma_2'^2+3\sigma_2'\sigma_1'+\sigma_1'^2+7\sigma_2'+3\sigma_1'+1\\ &=(\sqrt[3]{4})^2+3\sqrt[3]{4}(-\sqrt[3]{2})+(-\sqrt[3]{2})^2\\ &\quad+7\sqrt[3]{4}+3(-\sqrt[3]{2})+1.\\ &=8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-5. \end{aligned}$$

5）分子分母同倍以$8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-5$得

$$\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}=\frac{(\sqrt{5}+2)(8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-5)}{(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1)(8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-5)}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+2)(8\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-5)}{41}.$$

这里针对无理数分母，如何确定$g(x)$的构造，是值得注意的。它是与α的选择有关的，在上例中，如取

$$\alpha=\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$$

则$g(x)$将是

$$g(x)=x+1$$

此时$g(x)$的构造虽然简单了，但以α为根的$f(x)$将复杂些。因为，如令

$$x=\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned}x^3&=58+18\sqrt[3]{4}+54\sqrt[3]{2}\\&=58+18(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2})\\&=58+18x\end{aligned}$$

即以$\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$为根的多项式为

$$f(x)=x^3-18x-58$$

所以，α的选法对计算量的大小是有关的，但无论如何，$g(x)$总是存在的。这只要选整个分母为α，$g(x)=x$就可以了。有时可能会复杂些，但总是可行的。

例 2　将分数

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}}$$

的分母有理化

解 1）取$\alpha=\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}$，于是$g(x)=x$，使得$g(\alpha)$之值为原分数的分母。

2）求以α为根的有理系数多项式$f(x)$。为此，令

$$x=\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}.$$

移项得

$$(x-\sqrt{5})=\sqrt[3]{3}$$

将上式两边立方得

$$x^3-3\sqrt{5}x^2+15x-5\sqrt{5}=3$$

移项得

$$x^3+15x-3=\sqrt{5}(3x^2+5)$$

两端同时平方，得

$$x^6-15x^4-6x^3+75x^2-90x-116=0$$

因此，以$\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}$为根的有理系数多项式为

$$f(x)=x^6-15x^4-6x^3+75x^2-90x-116$$

3）以$x-(\sqrt[3]{3}+\sqrt{5})$除$f(x)$得商式

$$q(x)=x^5-b_1x^4+b_2x^3-b_3x^2+b_4x-b_5$$

其中

$$-b_1=\sqrt[3]{3}+\sqrt{5},$$

$$b_2=\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-10,$$

$$-b_3=3\sqrt[3]{9}\sqrt{5}-10\sqrt{5}-3,$$

$$b_4=15\sqrt[3]{9}+6\sqrt{5}-10\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-3\sqrt[3]{3}+25$$

$$-b_5=5\sqrt[3]{9}\sqrt{5}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-25\sqrt[3]{3}$$
$$-3\sqrt[3]{9}+25\sqrt{5}-15.$$

4）将$g(x_2)\cdots g(x_6)$ 表为 $\sigma'_1,\sigma'_2,\sigma'_3,\sigma'_4,\sigma'_5$的多项式：

$$g(x_2)\cdots g(x_6)=x_2x_3\cdots x_6=\sigma'_5.$$

于是

$$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_6)=b_5$$

5）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{5}}$

$$=\frac{g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_6)}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt{5})g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_6)}=\frac{b_5}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt{5})\cdot b_5}$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{9}\sqrt{5}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-25\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}+25\sqrt{5}-15}{(\sqrt[3]{3}+\sqrt{5})(5\sqrt[3]{9}\sqrt{5}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-25\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}+25\sqrt{5}-15)}$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{9}\sqrt{5}+3\sqrt[3]{3}\sqrt{5}-25\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{9}+25\sqrt{5}-15}{116}$$

由上述推导看到，采用例 2 的方法来选取 α 与$g(x)$，可以由已给的分数立刻确定。除此之外，在解例 2 的过程中还可以看到，步骤 4）与 5）也可以不必计算而写出结果。事实上，总有

$$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_2\cdots\alpha_n=b_{n-1},$$

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=a_n$$

而 b_{n-1} 和 a_n 已经在步骤 2）和 3）中计算出结果了，虽然如此，对于较复杂的分数的分母，用例 2 的方法求 $f(x)$ 和 $q(x)$ 的计算工作还是相当繁重的。

练　习　三

1．将下式分母有理化：

（1）$\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}$

（2）$\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$

2．若 a 满足所予方程，试将分式分母有理化：

（1）$\dfrac{a}{a+1}$；$a^3-3a+1=0$，

（2）$\dfrac{a^2-3a-1}{a^2+2a+1}$；$a^3+a^2+3a+4=0$，

（3）$\dfrac{1}{3a^3+a^2-2a-1}$；$a^4-a^3+2a-1=0$。

习　题　三

1．设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 F 上多项式，且 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，证明：对任意一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，如果 $g(c_1,c_2,\cdots,c_n)\neq 0$，则有 $f(c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$，那么，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 必为零多项式。

2．试将下列各式用初等对称多项式表示出来。

（1）$\Sigma\dfrac{1}{x_i^2}$，

（2）$\sum\limits_{i\neq j}\dfrac{x_i}{x_j}$。

3. 设α_1，α_2，α_3是实系数多项式

$$x^3+px^2+qx+r$$

的根，计算

（1）$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^3$，（2）$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2$

4. 证明 三次方程

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

的三个根α_1，α_2，α_3成等差级数的充要条件为

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0,$$

5. 设x_1，x_2，…，x_n是

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的根，证明 x_2，x_3，…，x_n的对称多项式，可以表成x_1与$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的多项式。

6. 设$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

$$=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\ (k=0,1,\cdots)$$

（1）证明

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x),$$

其中$g(x)$的次数$<n$

（2）由上式证明牛顿公式：

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k$$

$=0$，对于$k\leqslant n$；

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0,\ 对于k>n。$$

7. 利用牛顿公式，用初等对称多项式表示：s_2,s_3,s_4,s_5,s_6。

第四章　消　元　法

解方程是中学代数的一个重要部分，本章将在中学里解二元线性方程组、三元线性方程组的基础上，进一步讨论一般线性方程组的求解问题。

一般线性方程组的求解问题包括三个具体问题：

（1）有解条件

（2）解的个数

（3）求出全部解

对有无穷多个解的线性方程组还有解之间的关系问题，即通解的结构问题。

线性方程组的理论就是研究以上两个方面的问题——求解问题和通解的结构问题。

大家已经熟悉解二元、三元线性方程组的加减消元法。本章将指出加减消元法对一般线性方程组也是一种有效的求解方法。

§1　线性方程组的同解

所谓一般线性方程组是指下列的含 n 个未知数、m 个方程的方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

其中未知数的系数 a_{ij} $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$，常

数项 b_i 同时属于某一数域 F，方程的个数 m 与未知数的个数 n 不一定相等.

当（1）的常数项都为0时，称（1）为齐次线性方程组，相应地，当方程组（1）中至少有一个方程的常数项不为0，则称（1）为非齐次线性方程组.

设 c_1，c_2，…，c_n 是 F 中的 n 个数，如果令

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad \cdots, \quad x_n = c_n$$

时，方程组（1）中每一个方程都成为等式，则称 c_1，c_2，…，c_n 这 n 个数是方程组（1）的一个解.

线性方程组（1）的一切解的集合叫做方程组（1）的通解.

定义1　如果两个线性方程组的通解相等，则称这两个方程组同解.

线性方程组的同解是一个基本而重要的概念. 它表明：对于两个同解的线性方程组来说，解决了其中一个方程组的求解问题，就等于解决了另一个方程组的求解问题. 因此，讨论线性方程组求解问题的基本思想，就是把一个线性方程组的求解问题归结为另一个与之同解的而又易于求解的线性方程组的求解问题.

我们在中学里用加减消元法解方程组的基本思想就是如此. 比如，解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 \qquad\quad + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

解　把第一个方程的两边同乘以 -1 和 -2，然后分别加到第二和第三个方程上，得

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \qquad (2)'$$

把（2）′中第二个方程两边同乘以1和 -4，再分别加到第一

和第三个方程上，得

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + 2x_3 = 6 \\ \quad x_2 - x_3 = 5 \\ \qquad 3x_3 = -18 \end{cases} \tag{2''}$$

把（2）″中第一个方程两边同乘以$\frac{1}{2}$，再把第三个方程两边同乘以$\frac{1}{3}$。然后把第三个方程两边同乘以1和−1，分别加到第二和第一个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -6 \end{cases} \tag{3}$$

根据中学所讲的方程性质，（3）与（2）同解，于是9，−1，−6就是原方程组（2）的解。

这里确实把原来较复杂的方程组（2），用加减消元法变为与之同解而又易于求解的线性方程组（3），从而解决了（2）的求解问题。我们将把这个方法推广到一般线性方程组上去，为此给出

定义2　以下两种变换线性方程组的方法，统称为线性方程组的初等变换：

（Ⅰ）**倍法变换**　用一个不等于零的数k乘方程组中某一个方程的两端；

（Ⅱ）**消法变换**　把方程组中某一个方程的k'倍加到另一个方程上去。

定理　**如果线性方程组（*）用初等变换化为方程组（**），则（*）与（**）同解。**

证明　仅就消法变换作证明，倍法变换的情形留给读者自己证明。设线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
\qquad (*)
$$

把方程组（*）的第 i 个方程两边同乘以 k，然后加到第 j 个方程上，得

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(a_{j1}+ka_{i1})x_1+(a_{j2}+ka_{i2})x_2+\cdots+ \\
\quad (a_{jn}+ka_{in})x_n=b_j+kb_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
\qquad (**)
$$

下边来证明（*）与（**）同解。为此只须证明方程组（*）的任一解都是方程组(**)的解；反之，方程组（**）的任一解也都是方程组（*）的解即可。设 c_1，$c_2,\cdots,c_n$ 是方程组（*）的任一解，显然，它满足方程组（**）中除第 j 个方程以外的所有方程。并且将它代入第 j 个方程时，得

$$
\begin{aligned}
&(a_{j1}+ka_{i1})c_1+(a_{j2}+ka_{i2})c_2+\cdots+(a_{jn}+ka_{in})c_n \\
=&(a_{j1}c_1+a_{j2}c_2+\cdots+a_{jn}c_n)+k(a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots \\
&+a_{in}c_n)=b_j+kb_i
\end{aligned}
$$

上式说明，c_1，c_2，…，c_n 也满足第 j 个方程。即 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是方程组（**）的一个解。

由于（**）的第 i 个方程乘以 $-k$ 加到第 j 个方程上，就得到方程组（*）。所以，由上面的证明，可知方程组（**）的任一解

也都是方程组（*）的解. 从而方程组（*）与经过消法变换后所得到的方程组（**）同解.

关于初等变换还有下述结果：

命题　交换方程组中任意两个方程的方法叫做换法变换. 换法变换可以通过连续施行消法变换和倍法变换来实现.

证明　为简明起见，将方程组写为下面的形式：

$$\begin{cases} \cdots \\ (i) \\ \cdots \\ (j) \\ \cdots \end{cases}$$

其中(i)和(j)分别表示方程组中的第 i 个和第 j 个方程.

把第 i 个方程乘以 1 加到第 j 个方程上，得

$$\begin{cases} \cdots \\ (i) \\ \cdots \\ (j)+(i) \\ \cdots \end{cases}$$

把第 j 个方程乘以 -1加到第 i 个方程上，得

$$\begin{cases} \cdots \\ -(j) \\ \cdots \\ (j)+(i) \\ \cdots \end{cases}$$

把第 i 个方程乘以 1 加到第 j 个方程上，得

$$\begin{cases} \cdots \\ -(j) \\ \cdots \\ (i) \\ \cdots \end{cases}$$

最后用 -1 乘第 i 个方程，得

$$\begin{cases} \cdots \\ (j) \\ \cdots \\ (i) \\ \cdots \end{cases}$$

综合上述过程可知，交换方程组中第 i 个方程和第 j 个方程，可以通过连续施行若干次消法变换和倍法变换实现。

练 习 一

1. 证明倍法变换不改变方程组的解。

2. 证明同解关系具有下列性质：

（1）反身性　方程组（*）与方程组（*）同解；

（2）对称性　若方程组（*）与方程组（**）同解，则方程组（**）与方程组（*）同解；

（3）传递性　若方程组（*）与方程组（**）同解，而方程组（**）与方程组（***）同解，则方程组（*）与方程组（***）同解。

§2　线性方程组的一种解法——消元法

上节定理指出：初等变换把一个线性方程组变为一个与其同解的线性方程组。只是这样还不能解决问题，还需要变得的新方程组比原方程组有比较简单的形式（即原方程组经初等变换后能得到简化），从而它的求解问题能较容易的得到解决。本节将证明：初等变换不仅具有保持解不变的作用，同时还能简化方程组的形式，直至简化到完全可以求出通解的地步。这一点在前节例子中方程组（2）的求解过程已经看到。一般地有

定理1　设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

则（1）可经初等变换化为下列形式(适当调换未知数的次序)

$$\begin{cases} x_{i_1}+ \quad c_{1r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{1n}x_{i_n}=d_1 \\ \quad x_{i_2}+c_{2r+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{2n}x_{i_n}=d_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ \qquad x_{i_r}+c_{rr+1}x_{i_{r+1}}+\cdots+c_{rn}x_{i_n}=d_r \\ 0x_{i_1}+\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots+ \quad 0x_{i_n}=d_{r+1} \\ 0x_{i_1}+\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots+ \quad 0x_{i_n}=d_{r+2} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ 0x_{i_1}+ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots+ \quad 0x_{i_n}=d_m \end{cases} \qquad (2)$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r, i_{r+1}, \cdots, i_n$ 是1，2，…，n 的一个排列。

证明　下面指出用初等变换能把（1）变为（2）的形式。

首先，只要（1）的未知数的系数不全为0，总可假定第一个方程至少有一个未知数的系数不等于零。为明显起见，不妨假定原方程组（1）的系数 $a_{11}\neq 0$。于是对方程组（1）施行下列初等变换：把第一个方程的两边，同乘以 $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$，$-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$，…，$-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}$ 分别加到（1）的第2、第3、…、第m个方程上，然后再用$\dfrac{1}{a_{11}}$乘（1）的第一个方程。于是得到与方程组(1)同解的方程组如下：

$$\begin{cases} x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \\ \quad a'_{m2}x_2+\cdots+a'_{mn}x_n=b'_m \end{cases} \qquad (1)'$$

其次对方程组（1）′重复上边的作法．如果，（1）′中除第一个方程外，其它方程未知数的系数 $a_{ij}'(i=2,\cdots,m;\ j=2,\cdots,n)$ 全为0，则（1）′就是（2）形的了．如果 $a_{ij}'(i=2,\cdots,m;\ j=2,\cdots,n)$ 不全为0，则不妨假定 $a_{22}'\neq0$．于是对（1）′作如下的初等变换：

把（1）′中的第二个方程乘以 $-\frac{a_{12}'}{a_{22}'}$，$-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}$，…，$-\frac{a_{m2}'}{a_{22}'}$ 分别加到第1、第3、…、第m个方程上，再用 $\frac{1}{a_{22}'}$ 乘第二个方程，得到与（1）′同解的方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{13}''x_3 + \cdots + a_{1n}''x_n = b_1'' \\ x_2 + a_{23}''x_3 + \cdots + a_{2n}''x_n = b_2'' \\ a_{33}''x_3 + \cdots + a_{3n}''x_n = b_3'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m3}''x_3 + \cdots + a_{mn}''x_n = b_m'' \end{cases} \qquad (1)''$$

类似地作下去，就一定能把（1）变为（2）形的同解方程组．定理得证．

因为（1）与（2）同解，所以只需讨论（2）形的线性方程组的求解问题即可．

由于（2）形这种方程组的特定形式，立即得出

定理2

（Ⅰ）方程组（2）有解（从而（1）有解）的充分必要条件是：$d_{r+1}=d_{r+2}=\cdots=d_m=0$．*）

（Ⅱ）若方程组（2）有解（即 $d_{r+1}=\cdots=d_m=0$），则 $r=n$ 时，只有唯一解；$r<n$时，有无穷多个解．

（Ⅲ）若方程组（2）有解，且 $r<n$，则方程组（2）（即（1））的通解可表达为

---

*）d_{r+1}，d_{r+2}，…，d_m这$m-r$个常数项还可以用初等变换进一步化简为：d'_{r+1}，0，…，0的形式。于是，（2）有解的充分必要条件是$d'_{r+1}=0$。

$$
\begin{cases}
x_{i_1} = d_1 - c_{1\,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{1n}t_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{i_r} = d_r - c_{r\,r+1}t_{r+1} - \cdots - c_{rn}t_n \\
x_{i_{r+1}} = t_{r+1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{i_n} = t_n
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 t_{r+1}，…，t_n 为可在数域 F 中任意取值的 $n-r$ 个独立参数。

显然，定理 1 证明中所用的方法，就是大家早已熟悉的解二元、三元线性方程组的加减消元法的一般化。今后也把用初等变换解线性方程组的方法叫做消元法（当然真正起到消元作用的只是消法变换）。

这样，消元法已经比较圆满地解决了线性方程组的求解问题，即有解条件、解的个数和求出通解。

下面，将通过三个例子进一步熟习一下消元法及其所能解决的三个问题。

例 1　求解下列线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 = 2 \\
3x_1 + 2x_2 = 1 \\
2x_1 + 3x_2 = -1
\end{cases}
\tag{4}
$$

解　把第一个方程的两边同乘以 -3 和 -2 分别加到第二、第三个方程，得到与（4）同解的方程组

$$
\begin{cases}
x_1 - x_2 = 2 \\
5x_2 = -5 \\
5x_2 = -5
\end{cases}
\tag{4$'$}
$$

其次，把(4)$'$第二个方程乘以 -1 加到（4）$'$ 的第三个方程上，再用 $\frac{1}{5}$ 乘（4）$'$的第二个方程，得到与（4）$'$同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ \qquad x_2 = -1 \\ \quad 0x_2 = 0 \end{cases} \tag{4)''$$

把（4）″的第二个方程乘以1加到第一个方程上，得

$$\begin{cases} x_1 \quad = 1 \\ x_2 \quad = -1 \\ 0x_2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

这个方程组（5）就是定理1中所说的（2）形的方程组．此处，$r=2$，$n=2$，$d_{r+1}=d_3=0$．于是

（Ⅰ）方程组（4）有解；

（Ⅱ）因为 $r=2=n$，所以（4）有唯一解；

（Ⅲ）（4）的这个唯一解为：

$x_1=1$，$x_2=-1$．

例2　求解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \qquad 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \tag{6}$$

把第一个方程两边同乘以－3、－2、－1，分别加到第二、第三、第四个方程上，得到与（6）同解的方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ \quad 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases} \tag{6)'$$

其次，把（6）′中的第二个方程乘以－1依次加到第三、第四个方程上，然后再用－1乘（6）′的第二个方程，得到与（6）′同解的方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ \quad - 5x_2 + x_3 + 5x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 0x_4 = 0 \\ \qquad\qquad 0x_4 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

这个方程组（7）就是定理1中所说的（2）形的方程组，其中，$i_1 = 1$，$i_2 = 3$，$i_3 = 2$，$i_4 = 4$。这时 $n = 4$，$r = 2$，$d_{r+1} = d_3 = 0$，$d_{r+2} = d_4 = d_m = 0$。于是

（Ⅰ）方程组（6）有解；

（Ⅱ）因为$r = 2 < 4 (= n)$，所以（6）有无穷多个解；

（Ⅲ）（6）的通解可表达为

$$\begin{cases} x_1 = t_2 - 2t_4 \\ x_3 = -1 + 5t_2 - 5t_4 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \end{cases}$$

其中，t_2 和 t_4 是在 F 中可任意取值的两个参数。

比如，取$t_2 = 0$，$t_4 = 0$时，则

$x_1 = 0$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$，$x_4 = 0$

即0，0，-1，0是（6）的一个具体的解。

当取 $t_2 = 1$，$t_4 = 0$时，则

$x_1 = 1$，$x_2 = 1$，$x_3 = 4$，$x_4 = 0$

即1，1，4、0是（6）的又一个具体的解。

例3 求解下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \tag{8}$$

解 把第一个方程的两边同乘以-3和-2分别加到第二和第三个方程上，得到与（8）同解的方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ 5x_2 - x_3 = -5 \\ 5x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \qquad (8)'$$

其次，把（8）′的第二个方程乘以 -1 加到第三个方程上，然后把第二个方程乘以 $\frac{1}{5}$，得到与（8）′同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 = -1 \\ 0x_3 = 2 \end{cases} \qquad (8)''$$

把第二个方程乘以 1 加到第一个方程上，得到与（8）″同解的方程组

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 = -1 \\ 0x_3 = 2 \end{cases} \qquad (9)$$

这个方程组（9）就是定理 1 中所说的（2）形的方程组，此处，$n=3$，$r=2$，$d_{r+1}=d_3=2$。于是，方程组（8）无解。事实上，在得到（8）′时，就已明显看出原方程组不能有解。这是因为（8）′中的第二和第三两个方程是矛盾的。

从上述定理 1 的论证和例题中，显然可以看出：用消元法解线性方程组时，在消元的每一个步骤上，主要是对方程组的系数和常数项作相应的运算，而未知数 x_1，x_2，…，x_n 和等号每次都是重复写出。它们仅仅是起着"标位"的作用。因此，只要不把各个方程、每个未知数和常数项的次序搞乱，在作消元法时完全可以不必写出未知数和各个等号。比如，把例 3 中方程组（8）的未知数和等号都略而不写，仅仅把各系数和常数项按原来先后、左右次序写出来，即有

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{matrix}$$

这12个数的这种有一定次序的罗列方法，完全代表了线性方程组（8）。实际上，每一横排完全代表了线性方程组（8）的一个方程；最后一个竖排代表常数项，其它各竖排依次代表各未知数的系数。进而，对（8）所作的每一个初等变换也都能在上述罗列方法中自然地反映出来。比如，把第一个方程乘以 -3 加到第二个方程，自然相当于用 -3 乘第一横排的四个数相应地加到第二横排的四个数上。则得

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{matrix}$$

它们恰好代表（8）经过上述初等变换后所得的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad = 2 \\ \qquad 5x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

为了说清楚上述的想法和作法，下面给出不仅在代数学中是重要的，而且在许多方面都有所应用的概念——矩阵。

定义1　由数域 F 中 $m \times n$ 个数所排成的下列形式的表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

叫做数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵，或 m 行 n 列矩阵。

今后用大写的拉丁字母 A，B，C，…等代表矩阵。如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

都是3×4矩阵；

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$ 是一个3×3矩阵；

$D=(1\quad -1\quad 0\quad 2)$ 是一个1×4矩阵；

$$E=\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$$ 是一个3×1矩阵。

$F=(0)$ 是一个1×1矩阵。

组成矩阵（10）的每个数 a_{ij} 叫做它的**元素**．矩阵（10）的每一横排的 n 个数，叫做矩阵（10）的一个**行**；每一竖排的 m 个数叫做一个**列**．由此，$m\times n$ 矩阵由 m 个行 n 个列组成，特别地，$n\times n$ 矩阵称为 n **阶方阵**，元素 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 称为对角线元素。

用线性方程组（1）的系数和常数项可组成两个矩阵如下：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}a_{m2}\cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12} & \cdots & a_{1n}b_1\\ a_{21}a_{22} & \cdots & a_{2n}b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}a_{m2} & \cdots & a_{mn}b_m\end{pmatrix}$$

把 A 叫做线性方程组（1）的**系数阵**，$\overline{A}$ 叫做方程组（1）的**表示矩阵**（或增广矩阵）．

显然，每一个线性方程组都唯一决定一个表示矩阵；反之，每一个 $m\times(n+1)$ 矩阵都确定唯一一个以其为表示矩阵的线性方程组。

定义2　两个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21}a_{22} & \cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}b_{11}b_{12}\cdots & b_{1n}\\ b_{21}b_{22}\cdots & b_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{m1}b_{m2}\cdots b_{mn}\end{pmatrix}$$

当且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$ 时（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）叫做相等，记作：$A=B$。

按定义，两个矩阵只有在型相同（即行、列数分别相等）的前提下，谈相等才有意义。如，$A=(1\quad 2\quad 3)$，$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，不存在$A$与$B$是否相等的问题。又如，

$C=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$，这时$C$和$D$都是$2\times2$矩阵，而且笼统地说，都是由 1，2，3，4 这四个数组成，但是按定义，$C\neq D$。

类似于方程组的初等变换，下面来定义矩阵的初等变换。

定义3　下面两种变换矩阵的方法，统称为矩阵的（行）初等变换：

（Ⅰ）**倍法变换**　用不等于 0 的数 k 乘矩阵的某一行；

（Ⅱ）**消法变换**　把矩阵的某一行的 k' 倍加到另一行的相应元素上去。

对照上节命题可以看出：交换矩阵的两行可以通过对矩阵的行作初等变换实现。以后，我们把交换两行这种变换矩阵的方法叫做**换法变换**。

例4　对矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$ 的行作倍法变换：用 7 乘A的第二行，则A变为矩阵：

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\21&14&-7&7&7\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

对A作消法变换：把第一行乘以 -3 加到第二行上，则A变为矩阵：

$$A_2=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\0&5&-1&-5&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

如果对A_2接着再作倍法变换时：用－1乘 A_2 的第四行，则A_2变为矩阵：

$$A_3=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\0&5&-1&-5&1\\2&3&-1&-1&1\\-1&-4&1&3&-1\end{pmatrix}$$

这个矩阵 A_3 就是A经过两次初等变换（一次消法变换和一次倍法变换）变得的矩阵。

为了书写方便起见，我们用$D_i(k)$表示用不等于0的数k去乘矩阵A的第i行的倍法变换；用$P_{ij}(k')$表示把矩阵A的第j行的k'倍加到A的第i行上这样的消法变换，用$C[i, j]$表示交换第i行和第j行的换法变换。当矩阵A经过初等变换变为B时，用$\longrightarrow$连结A与B，记作：$A\longrightarrow B$，并把所作的初等变换用符号$D_i(k)$，$P_{ij}(k')$或$C[i, j]$标示在$\longrightarrow$的上方。例如：

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{D_2(7)}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\21&14&-7&7&7\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-3)}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\0&5&-1&-5&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_4(-1)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

显然，使用上述的符号和格式既简便又明了。

另外，为了论证问题方便起见，把矩阵 A 经某一初等变换变得的矩阵 B，用等式的形式把 B 与 A 连结起来．例如，在上例中，

$A_1 = D_2(7)A$，$A_2 = P_{21}(-3)A$，$A_3 = D_4(-1)A_2 = D_4(-1)P_{21}(-3)A$，等等。

上面这种写法，现在姑且作为一种形式去使用它，在第八章中我们将看到它的合理性。

定义 4　两个 $m\times n$ 矩阵 A 与 B，如果用（行）初等变换使 A 变到 B 时，则称 A 与 B 是（行）相抵的，记作：$A \rightleftharpoons B$。

容易想到，对线性方程组施行初等变换，相当于对它的表示矩阵施行一个对应的行的初等变换；而用初等变换化简方程组，则相当于用行的初等变换化简表示矩阵．反之，对方程组的表示矩阵作行的初等变换，相当于对这个方程组施行对应的初等变换；用行的初等变换化简表示矩阵，相当于化简这个方程组．例如把本节例 2 求解过程，对照写成矩阵的形式时，则有

求解方程组	化简表示矩阵
$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
把第一个方程的 -3 倍，-2 倍，-1 倍分别加到第二，第三，第四个方程上，得	把第一行的 -3 倍，-2 倍，-1 倍分别加到第二，第三，第四行上，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + 2x_4 = 0 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ 5x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

把第二个方程的-1倍加到第三，第四个方程上，然后再用-1乘第二个方程，得

把第二行的-1倍加到第三，第四行上，然后用-1乘第二行，得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + 2x_4 = 0 \\ -5x_2 + x_3 + 5x_4 = -1 \\ 0x_4 = 0 \\ 0x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从这个例子，进一步看到：利用初等变换化简线性方程组和利用初等变换化简该方程组的表示矩阵是一致的。于是由§1定理有

定理 3　若对线性方程组（1）的表示矩阵$\overline{A}$作行的初等变换化为$\overline{B}$时，则以$\overline{B}$为表示矩阵的线性方程组与方程组（1）同解。

进一步，由本节定理1，可知任何线性方程组的表示矩阵$\overline{A}$都可经若干次行的初等变换化为下形的矩阵：

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} * \cdots 1 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & * \cdots * & d_1 \\ * \cdots 0 \cdots 1 \cdots 0 \cdots 0 & * \cdots * & d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ * \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 1 & * \cdots * & d_r \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & d_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & d_m \end{pmatrix}$$

这时该方程组的系数阵A可经过行的初等变换化为：

$$\begin{pmatrix} * \cdots 1 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & * \cdots * \\ * \cdots 0 \cdots 1 \cdots 0 \cdots 0 & * \cdots * \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ * \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 1 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

由于任何$m \times n$矩阵A都可作为某一线性方程组的系数阵，所以有

定理 4　任意$m \times n$矩阵A都与下列"B型"矩阵行相抵：

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

B中有这样r个列，每个列只有一个元素是1其余都是0，而且这r个1分布在不同的r个行上．特别地，当B的这r个特殊列在前r个列时，便有：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_{1\,r+1} & \cdots & b'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_{2\,r+1} & \cdots & b'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_{r\,r+1} & \cdots & b'_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

例 5　用矩阵的行初等变换将矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 1\\ 2 & 10 & 1 & 3\\ 3 & 15 & -1 & 1\\ 1 & 5 & -7 & -1\end{pmatrix}$$

化为 B 型阵。

解 把矩阵 A 的第一行的 -2 倍，-3 倍，-1 倍分别加到第二，第三，第四行上，则 A 化为：

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -6 & -2\end{pmatrix}$$

为了简化步骤，在上述的演算程序中，我们把上述三次初等变换集中起来写成一个步骤如下：

$$A\xrightarrow{P_{21}(-2),P_{31}(-3),P_{41}(-1)}\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -6 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{12}(-1),P_{32}(2),P_{42}(2)}\begin{pmatrix}1 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_3\left(\frac{1}{8}\right),\ P_{23}(-3),P_{13}(4)}\begin{pmatrix}1 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

上面最后一个矩阵即为 B 型阵。

由前面关于线性方程组与其表示矩阵的关系，可以给出用矩阵的行初等变换解线性方程组的方法——分离系数法。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{11}$$

则其系数阵 A 和表示矩阵 $\overline{A}$ 分别为：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots & a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots & a_{2n}b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

要解线性方程组（11），首先将表示矩阵 $\overline{A}$ 作行的初等变换，将 $\overline{A}$ 中系数阵 A 相应的部分化为 B 型阵，所得到的矩阵为 $\overline{B}$ 时，则以 $\overline{B}$ 为表示矩阵的线性方程组与方程组（11）同解．于是解由 $\overline{B}$ 所确定的线性方程组即可得到（11）的解，这样解线性方程组的方法叫做分离系数法。

例 6　求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \tag{12}$$

解　用分离系数法．先写出方程组（12）的表示矩阵：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

其次，对 $\overline{A}$ 的行作初等变换，使其系数阵 A 这一部分化为 B 型阵。

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\3 & 2 & -1 & 1 & 1\\2 & 3 & -1 & -1 & 1\\1 & 4 & -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2),P_{41}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\0 & 5 & -1 & -5 & 1\\0 & 5 & -1 & -5 & 1\\0 & 5 & -1 & -5 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}(-1),\ P_{42}(-1),D_2(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0\\0 & -5 & 1 & 5 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\overline{B}$$

于是方程组（12）与以$\overline{B}$为表示矩阵的线性方程组：

$$\begin{cases}x_1-x_2+\quad 2x_4=0\\-5x_2+x_3+5x_4=-1\\\qquad\qquad 0x_4=0\\\qquad\qquad 0x_4=0\end{cases}\tag{13}$$

同解。

对于方程组（13）来说，即为本节例 2 中的线性方程组（7）。故将下面步骤从略。

例 7　求解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3-x_4=0\\x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\\3x_1+8x_2-x_3+x_4=0\\x_1-9x_2+3x_3+7x_4=0\end{cases}\tag{14}$$

解　用分离系数法。首先写出方程组（14）的表示矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 8 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -9 & 3 & 7 & 0\end{pmatrix}$$

其次，对$\overline{A}$作行的初等变换，使其系数阵部分化为B型阵：

$$\overline{A}\xrightarrow{P_{21}(-1),P_{31}(-3),P_{41}(-1)}\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -7 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -7 & 2 & 4 & 0\\ 0 & -14 & 4 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{12}(\frac{1}{2}),P_{32}(-1),P_{42}(-2)}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\overline{B}$$

于是方程组（14）与以$\overline{B}$为表示矩阵的线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+\frac{3}{2}x_2 \qquad\qquad +x_4=0\\ \qquad -\frac{7}{2}x_2+x_3+2x_4=0\\ \qquad\qquad\qquad 0x_4=0\\ \qquad\qquad\qquad 0x_4=0\end{cases}\tag{15}$$

同解。

对于方程组（15）来说，$r=2$，$n=4$，$d_3=d_4=0$。所以方程组（15）有解，而且有无穷多个解，通解的表达式为：

$$x_1=-\frac{3}{2}t_2-t_4$$
$$x_2=t_2$$
$$x_3=\frac{7}{2}t_2-2t_4$$
$$x_4=t_4$$

其中 t_2，t_4 是可在数域F中任意取值的两个独立参数。

这个例子是一个齐次线性方程组，用分离系数法求解时，常数项始终不发生变化，所以解齐次线性方程组时，不必就其表示矩阵化简，而只须就其系数阵作行的初等变换化简即可。

练 习 二

1．解下列线性方程组

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=5\\ 2x_1+4x_2\qquad -x_4=-3\\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=8\\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=-21 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1+2x_2\qquad -3x_4+2x_5=1\\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2\\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7\\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\ 2x_1-3x_2-3x_3-2x_4=0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \end{cases}$

2．讨论 a、b 取什么值时方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解，并求其解。

3．设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad (\cdot)$$

当$s<n$时，则方程组（·）有无穷多解，因而必有非0解（一个解的 n 个数中至少有一个不为0）。

4．设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \quad (1)$$

把（1）中的每个方程的常数项都换为0，所得到的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \quad (1)'$$

叫做方程组（1）的导出齐次组或导出组。

证明：当 $s=n$ 时，（1）有唯一解必要而且只要它的导出组（1）′只有0解。

5．若矩阵 A 经过一次消法（倍法）变换得到 B，则必能由 B 经过一次消法（倍法）变换得到 A。

§ 3　矩阵在初等变换下的标准形

上一节从求解线性方程组的角度我们引进了矩阵和矩阵的行初等变换的概念。正如前面所指出的，矩阵在许多方面都有应用。这样，对于矩阵列的初等变换，和行的初等变换一样，也是需要讨论的重要问题。本节将给出矩阵列的初等变换，相抵，在相抵之下的分类和标准形等概念以及相应的结论。

定义 1　以下变换矩阵的方法统称为矩阵列的初等变换：

（Ⅰ）　**倍法变换**　用不等于零的数 k 乘矩阵的某一列；

（Ⅱ）　**消法变换**　把矩阵第 i 列的 k' 倍加到第 j 列上 $(i \neq j)$。

对照矩阵行的换法变换，容易看出：交换矩阵两列也可通过对列作初等变换实现。我们称交换矩阵两列的变换方法为列的换法变换。

定义 2　两个 $m \times n$ 矩阵 A 和 B，如果用列的初等变换（包括换法变换）A 能够变为 B 时，则称 A 与 B 列相抵，记作：$A \overrightarrow{=} B$。

以下如果只说初等变换，不明确指明是对行或对列，就意味着对行对列都可以。

定义 3　两个 $m \times n$ 矩阵 A，B，如果用初等变换（包括换法变换）能够把 A 变为 B，则称 A 与 B 相抵，记作：$A \longrightarrow B$。

矩阵相抵是代数学中很重要的概念，不难证明矩阵的相抵有下列三条性质：

（1）反身性：任一 $m \times n$ 矩阵 A 都与它本身相抵，即

$A \longrightarrow A$。

（2）对称性：若 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 相抵，则 B 与 A 相抵，即若 $A \longrightarrow B$，则 $B \longrightarrow A$。

（3）传递性：若 $m \times n$ 矩阵 A 与 B 相抵，B 与 C 相抵，则 A 与 C 相抵，即

若 $A \longrightarrow B$，$B \longrightarrow C$　则 $A \longrightarrow C$。

这三条性质，都可以由定义直接推出，作为练习留给读者证明。

由上述三条性质，可以把全体$m\times n$矩阵用相抵关系予以分类。我们规定：两个$m\times n$矩阵A和B分在一类，当且仅当A与B相抵。这样，分在同一类里的矩阵都彼此相抵，不在同一类的两个矩阵都不相抵，把这样分得的每一个类叫做一个相抵类。

下面来讨论矩阵在初等变换作用下的化简。

命题1　任一n阶方阵A都行相抵于下列形式的n阶方阵：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & & & * \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

列相抵于下列形式的n阶方阵：

$$\begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & d_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

我们称形如（1）的方阵为上三角形的；形如(2)的方阵叫下三角形的。特别的，即是上三角形的又是下三角形的方阵叫对角形阵。

证明　设n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

只要证明了A行相抵于（1），自然也有A列相抵于（2）。

对A的阶数n作数学归纳法。

显然$n=1$时，命题1成立。假设命题1对$n-1$成立，去证对n命题1也必成立。

首先，如果A的第一列元素全为0，即

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_{12}\cdots a_{1n}\\ 0 & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

设

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

则A_1为$n-1$阶方阵，于是由归纳假设A_1行相抵于一上三角形阵：

$$B_1=\begin{pmatrix}a'_{22} & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn}\end{pmatrix}$$

从而（因为对A_1的行作初等变换可以看成对A的行作初等变换）A行相抵于上三角形阵：

$$\begin{pmatrix}0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n}\\ & a'_{22} & & * & \\ & & a'_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a'_{nn}\end{pmatrix}$$

其次，如果A的第一列元素不全为0，则A的第一行第一列元素$a_{11}\neq0$，或者A行相抵于第一行第一列元素不为0的n阶方阵。因此，不妨假定$a_{11}\neq0$。于是把A的第一行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$倍，$-\frac{a_{31}}{a_{11}}$倍，$\cdots$，$-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到A的第二，第三，$\cdots$，第n行上，则得到一个行相抵于A的矩阵：

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ 0 & a'_{22}\cdots a'_{2n}\\ \vdots & \vdots\ \cdots\ \vdots\\ 0 & a'_{n2}\cdots a'_{nn}\end{pmatrix}$$

由于右下角的$(n-1)^2$个元素所构成的$n-1$阶方阵行相抵于上三角形阵（应用归纳法假设），所以A行相抵于上三角形阵。证完。

命题2　任一n阶方阵A，只用行（列）的消法变换就能化为上（下）三角形阵。

事实上，在命题1的证明中并未用到倍法变换，所以命题2成立。

定理　任一$m\times n$矩阵A都相抵于矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (r\text{个}1) \tag{3}$$

其中未标出的元素都是0。

证明　由§2定理3，对A作行的初等变换再适当的交换列的次序（对列作初等变换）则A相抵于下形的矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ & 1 & & & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

在此基础上，利用左上方的r个1，作列的消法变换，便可得到（3）形的矩阵。即A相抵于（3）形的矩阵。

我们把与矩阵A相抵的（3）形矩阵，叫做A在相抵之下的标准形。定理表明：每个相抵类里都存在标准形矩阵，而且，不同相抵类的标准形也不同，需要进一步解决的问题是：一个相抵类里不能有两个不同的标准形，或者换个说法：两个标准形矩阵相抵当且

仅当二者所含 1 的个数相等。这个问题将在下一章解决。

例 1　分别用行和列的初等变换化矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

为上、下三角形阵。

解　先用行的初等变换把 A 变为上三角阵。

$$A\xrightarrow{P_{21}(-3)P_{31}(-2)}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 5 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其次用列的初等变换把 A 变为下三角形阵。为此，先说明一下符号。与行的初等变换相同，用 $D_i(k)$ 表示用 $k\neq 0$ 乘矩阵的第 i 列；用 $P_{ij}(k')$ 表示把第 i 列的 k' 倍加到第 j 列上；用 $C(i, j)$ 表示变换第 i 列和第 j 列。但是，要把符号写在 $\longrightarrow$ 的下边。于是

$$A\xrightarrow[P_{12}(1)]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & -1\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[P_{23}(\frac{1}{5})]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

把变得的结果，采用 §2的约定，与原来矩阵 A 用等式连结起来就有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}=AP_{12}(1)P_{23}\left(\frac{1}{5}\right)$$

这里把初等变换的符号写在 A 的后边表示变列。

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=P_{32}(-1)P_{31}(-2)P_{21}(-3)A。$$

例 2　化下列矩阵为标准形：

（1）　　　　　　　　（2）

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\3&2&-1\\2&3&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0&2\\3&2&-1&1\\2&3&-1&1\end{pmatrix}$$

（3）

$$C=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}$$

解

（1）由例 1 已知

$$A\overset{r}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad A\overset{c}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\3&5&0\\2&5&0\end{pmatrix}$$

进一步便有

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[P_{12}(1)]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[D_2\left(\frac{1}{5}\right)]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[P_{23}(1)]{}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

或

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\3&5&0\\2&5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&5&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{32}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{5}\right)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

即 A 的标准形为：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（2）

$$B\xrightarrow[P_{12}(1),P_{14}(-2)]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[D_2\left(\frac{1}{5}\right)]{D_3\left(\frac{1}{2}\right)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[P_{23}(1),\ P_{24}(5)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[C[3,4]]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以，B 的标准形为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

（3）

$$C\xrightarrow[P_{12}(1),P_{14}(-2)]{}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2),P_{41}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{32}(-1),P_{42}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&5&-1&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[D_2\left(\frac{1}{5}\right)]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&-1&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[P_{23}(1)P_{24}(5),P_{25}(-1)]{}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以，C的标准形为：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

建议读者把以上所求出的标准形用等式和原来的矩阵连结起来。

练 习 三

1．将下列矩阵只用行的消法变换化为上三角形。

（1）
$$\begin{pmatrix}1&1&2&3\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\\1&2&3&-1\end{pmatrix}$$

（2）
$$\begin{pmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&-3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{pmatrix}$$

2．将下列矩阵化为标准形

(1)

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

3. 将本节例2的各矩阵与其标准形用等式连结起来。

4. 证明任一 $m\times n$ 矩阵 A，可以只通过消法变换化为：

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

其中未标出的元素都是0。

5. 证明：只作行的消法变换可将矩阵$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$化为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

6. 证明矩阵的相抵关系适合反身性，对称性，传递性。

习 题 四

1. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \end{pmatrix}$$

证明A与B行相抵。

2. 化

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & a_3 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots a_n \\ a_1 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

为上三角形阵（限于对行作消法变换）。

3. 已知

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1t} \\ \cdots\cdots \\ a_{s1} \cdots a_{st} \end{pmatrix} \text{与} A_2=\begin{pmatrix} a'_{11} \cdots a'_{1t} \\ \cdots\cdots \\ a'_{s1} \cdots a'_{st} \end{pmatrix} \text{相抵，}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1k} \\ \cdots\cdots \\ b_{l1} \cdots b_{lk} \end{pmatrix} \text{与} B_2=\begin{pmatrix} b'_{11} \cdots b'_{1k} \\ \cdots\cdots \\ b'_{l1} \cdots b'_{lk} \end{pmatrix} \text{相抵，}$$

则

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1t} & \\ \cdots\cdots & \\ a_{s1} \cdots a_{st} & \\ & b_{11} \cdots b_{1k} \\ & \cdots\cdots \\ & b_{l1} \cdots b_{lk} \end{pmatrix} \text{与 } B=\begin{pmatrix} a'_{11} \cdots a'_{1t} & \\ \cdots\cdots & \\ a'_{s1} \cdots a'_{st} & \\ & b'_{11} \cdots b'_{1k} \\ & \cdots\cdots \\ & b'_{l1} \cdots b'_{lk} \end{pmatrix}$$

相抵。上列二阵中未标出的元素都为0。

4. 化下列矩阵为上三角形（限定只用行的消法变换）。

（1）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$$ 其中，a、b、c、d是两两不同的数。

(2)

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 \cdots a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 \cdots a_2b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 \cdots a_mb_n \end{pmatrix}, \quad a_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

5. 化下列矩阵为标准形.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix},$$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \cdots a \\ a & 1 & a \cdots a \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a & a & a \cdots 1 \end{pmatrix}$$

6. 解下列线性方程组.

(1)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 9x_3 = a \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = b \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 \qquad = b \end{cases}$$

7. 证明：对矩阵的行作消法变换可以只通过连续作若干次相邻两行的消法变换实现。

第五章 行 列 式

上一章所介绍的消元法，已经基本上解决了线性方程组理论的求解问题，而且从实际解题中体会到，消元法是一种简便易行灵活有效的方法．但是，它还存在一些值得进一步研究的问题．

首先，在上一章§2的讨论中看到，线性方程组有解与否由d_{r+1}，…，d_m是否都等于0决定．而这里的d_{r+1}，…，d_m只是消元后最终所遗留下来的一组数．尽管它是由给定的线性方程组的诸系数所决定的，但是从消元后所得的结果却一点也看不出与方程组诸系数有何直接联系．

其次，在有解情况下，$r=n$或$r<n$决定方程组的解只有一个或无穷多个．尽管这个r也应该是由方程组的系数所决定，但是这里也看不出这个关键的数r与方程组的诸系数有何必然的联系．特别是，当$r<n$时，这里边的伸缩性更大．

再次，当$d_{r+1}=\cdots=d_m=0$，$r<n$时，方程组的通解可表达为：

$$\begin{cases} x_1=d_1-c_{1,r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{1n}t_n \\ \quad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \\ x_r=d_r-c_{r,r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{rn}t_n \\ x_{r+1}=t_{r+1} \\ \qquad\vdots \\ x_n=t_n \end{cases}$$

其中t_{r+1}，…，t_n为在数域F中任意取值的$n-r$个独立的参数．

从这个表达式中，也丝毫看不出解与方程组的系数有何联系．

总括起来说，消元法所回答的关于解线性方程组的三个问题，都没有体现出线性方程组的解与系数之间的直接联系．而解与系数

之间的直接联系，不仅在具体求解方面是有用的，而在论证问题和解决实际问题上更为重要。

中学数学中关于一元二次方程的讨论是这方面一个很好的范例。我们知道，关于实系数一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$　（*）有下述结果：

（Ⅰ）（*）有实根当且仅当$b^2-4ac\geqslant 0$；

（Ⅱ）（*）有唯一实根（即二等根）当且仅当$b^2-4ac=0$；

（Ⅲ）（*）的求根公式为：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

上述结果指出，通过实系数二次方程的系数给出了实系数二次方程有否实根以及实根个数的判定条件，并给出了求根公式。

对于线性方程组的求解问题，我们也希望能这样，用方程组的系数的某种关系来表述有解条件，解的个数和求解公式。

本章和下一章就专门解决这些问题，同时在下一章还将解决解之间的关系问题。为了解决通过方程组的系数来表述方程组求解的有关问题，我们引进行列式作为工具，本章重点讨论行列式的有关理论。

§1　二、三阶行列式

为了引进行列式的定义，先从用消元法解二、三元线性方程组开始。设二元线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1}$$

用a_{22}乘第一个方程，$-a_{12}$乘第二个方程然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

再用$-a_{21}$乘第一个方程，a_{11}乘第二个方程然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

可以证明：如果$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组(1)与方程组

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}\end{cases}\tag{2}$$

同解。于是可得

（1）如果$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则(2)，从而(1)有解；

（2）如果$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则(2)，从而(1)恰有一解；

（3）如果$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则(2)，从而(1)的解为：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{D}\ ,\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{D}\tag{3}$$

下面来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{4}$$

用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$ 乘第一个方程，$-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$乘第二个方程，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘第三个方程然后相加，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}\end{aligned}$$

类似地用$-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$乘第一个方程，$a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$乘第二个方程，$-(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$乘第三个方程，相加得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32})x_2\\&=a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3\end{aligned}$$

用$(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$乘第一个方程，$-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$乘第二个方程，$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$乘第三个方程，相加得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&\quad-a_{11}a_{23}a_{32})x_3\\&=a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}\end{aligned}$$

可以证明，如果

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \neq 0$$

则方程组（4）与方程组

$$\begin{cases} \Delta x_1 \qquad\qquad = \Delta_1 \\ \qquad \Delta x_2 \qquad = \Delta_2 \\ \qquad\qquad \Delta x_3 = \Delta_3 \end{cases} \tag{5}$$

同解，其中，$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$，依次为上面推导出来的三个方程的常数项，于是得到：

（1）如果$\Delta \neq 0$，则方程组（5），从而（4）有解；

（2）如果$\Delta \neq 0$，则（5）从而（4）恰有一个解；

（3）如果$\Delta \neq 0$，则（5）从而（4）的解为

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad .$$

以上论述表明，二、三元线性方程组可用其系数组成的某种特定的代数和来表述有解条件，解的个数以及求解公式。这一事实一方面说明用线性方程组系数的一种关系来直接表述线性方程组的求解问题是可能的，同时也提供了进而解决一般问题的线索和途径一分析这两个代数和的构成情况，从中找出规律性的属性进而把它推广到一般情形。

下面就来分析由二、三元线性方程组的系数所构成的代数和D和Δ的规律。

我们分别写出线性方程组（1）和（4）的系数阵以及由它们所确定的代数和D和Δ：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

对上述代数和D和Δ，只要弄清楚其项数，各项是怎样组成的以及每项前边的符号是如何确定的，那么该代数和就完全确定。

对上述两个代数和可以指出：

（1）代数和$D(\Delta)$是$2=2!$（$6=3!$）项的代数和；

（2）代数和$D(\Delta)$的项是二阶方阵A（三阶方阵B）的既不同行又不同列的两（三）个元素相乘之积组成的。而且所有这样的乘积都是它的项。因此，$D(\Delta)$的项的一般形式可表为：

$$a_{1i_1}a_{2i_2}(a_{1i_1}\ a_{2i_2}\ a_{3i_3})$$

其中，$i_1i_2(i_1\ i_2\ i_3)$是1,2,（1,2,3）的任一排列，需要指出的是，项的这种表示法的特点是各元素的行下标取由小到大的排法。

（3）在行下标取由小到大的排法时，$D(\Delta)$中冠以正号的项的列下标构成下面的排列：

1 2（1 2 3；2 3 1；3 1 2）

冠以负号的项的列下标构成下面的排列：

2 1（1 3 2；2 1 3；3 2 1）

这样，从二阶方阵A（三阶方阵B）构成代数和$D(\Delta)$的规律已经基本上弄清楚。作为上面论述的小结，我们规定：

代数和D叫做二阶方阵A的行列式，记作$det A$或$|A|$；

代数和Δ叫做三阶方阵B的行列式，记作$det B$或$|B|$。

二阶方阵A的行列式叫做二阶行列式，也记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

于是，$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶方阵B的行列式叫做三阶行列式，也记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

于是，

$$\det B = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

或者

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

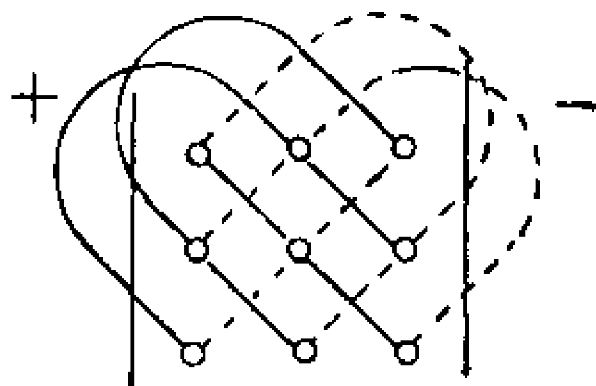
关于二、三阶行列式，应当注意：

（1）每个二阶（三阶）方阵都确定唯一的一个二（三）阶行列式；

（2）二（三）阶方阵与二（三）阶行列式不能混为一谈，它们有联系又有区别。本质上的区别在于行列式是一个代数和，其结果是数域 F 中的数，叫做行列式的值。而方阵是一个表，不是数，它主要体现一些数的位置关系。从符号上看，阵用的是圆括号，行列式用的是两个竖直线段。

（3）每个元素都附有两个下标。前者表示该元素所在之行的位置序数，后者表示该元素所在之列的位置序数。这种记法主要是为了叙述问题和讨论问题方便，而在具体问题中，只要方阵给定了，每个元素之行列位置就已确定，所以，这时就不必写出下标。

（4）二阶行列式的值是容易计算的，对于三阶行列式有一个便于记忆的计算规则——对角线规则：



即实线上所组成之乘积其前边冠以正号，虚线上所组成之乘积其前边冠以负号。

例 1　计算下列二阶方阵所确定的二阶行列式的值：

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{2} & 3\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

解

$$\det A_1=\begin{vmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{2} & 3\end{vmatrix}=1\times3-(-2)\times\frac{1}{2}=4$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=(-1)\times(-2)-2\times1=0$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5\times1-1\times1=4$$

例 2　计算三阶列行式的值：

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

解　应用对角线规则

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\times1\times1+0\times(-2)\times0+(-1)\times2\times3-(-1)\times1\times0-0\times2\times1-1\times(-2)\times3=1$$

例 3　写出三阶方阵

$$B_1=\begin{pmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

的行列式。

解

$$\det B_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

应用二、三阶行列式,关于二,三元线性方程组的求解问题可得

命题 **如果二（三）元线性方程组(1)((4))的系数阵 $A(B)$的行列式 $\det A\neq 0(\det B\neq 0)$，则(1)((4))有唯一解为**

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

$$\left(x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}},\right.$$

$$\left.x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}}\right)$$

从上面解的表法，可以看出线性方程组的解的规律。首先，二元线性方程组(1)的解是二数之商，其分母相同，都是系数阵的行列式，称它为方程组的系数行列式，其中 x_1的分子为用常数项替换系数行列式的第一列所得到的二阶行列式，而 x_2的分子为用常数项

替换系数行列式的第二列所得到的二阶行列式．类似地，可以揭示三元线性方程组解的规律．

练　习　一

1．计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ a & b \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

2．利用二阶行列式解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} 5x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+2x_2=1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha=a \\ x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha=b \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 3x_1+5x_2=0 \\ 2x_1+3x_2=0 \end{cases}$

3．计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

4．用三阶行列式解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-1 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1 \\ 4x_1+2x_2+5x_3=4 \\ 2x_1+2x_3=6 \end{cases}$

§ 2　排列的奇偶性

上节给出了二、三阶行列式的概念，并且对二、三阶行列式的构成规律也有了基本的了解。为了象用二、三阶行列式去解决二、三元线性方程组的求解问题那样去解决一般线性方程组的求解问题，首先必须把二、三阶行列式推广，给出行列式的一般定义。但是，我们的准备还不够充分。问题在于对二、三阶行列式每项前边的正负号的确定，只是知其然而不知其所以然，还说不出确定各项符号的规律。解决问题的途径是必须揭示出取相同符号的各项，其列下标所构成的排列的共性，从而掌握确定各项前面正、负号的一般规律。为此，我们来讨论排列的奇偶性。

前n个自然数1，2，…，n的任意一种确定的排列方法：$i_1i_2\cdots i_n$ 都叫做一个n元排列．n元排列的全体所成的集合用符号S_n表示．可知，n元排列共有$n!$个．例如，1，2的二元排列共有$2!=2$个：12，21．

1，2，3的三元排列共有$3!=6$个：

123；231；312；132；213；321．

在n元排列中，只有排列$1\ 2\cdots n$特殊，它是按数的大小次序，由小到大从前往后排列的，称它为**自然排列**．其它任一n元排列都一定出现较小的数i排在大数j之后的情况，这时称i与j构成排列的一个**反序**．如在四元排列2 1 4 3中，1与2构成一个反序，3与4也构成一个反序．排列2 1 4 3中共有两个反序．再如，在排列3 1 4 2中，1与3，2与3，2与4都构成反序，且只有这三个反序，即排列3 1 4 2共有三个反序．显然，自然排列没有反序．

定义1　n元排列$i_1i_2\cdots i_n$中反序的个数叫做它的**反序数**，记作：$\tau[i_1i_2\cdots i_n]$．

由定义1容易知道，n元排列$i_1i_2\cdots i_n$的反序数$\tau[i_1i_2\cdots i_n]$，

等于排列中每个数码前边大于该数码的数的个数之和。所以，计算一个n元排列的反序数，可先从最小数码1作起，如果比1大排在1之前的数码有m_1个，比2大排在2之前的数码有m_2个，…，直到最后，则$\tau[i_1 i_2 \cdots i_n] = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$。于是

$$\tau[2\ 1\ 3\ 4] = 2,\ \tau[3\ 1\ 4\ 2] = 3,\ \tau[1\ 2 \cdots n] = 0$$

定义2　反序数是偶数的排列叫偶排列，反序数是奇数的排列叫奇排列。

按定义2可知，每一排列非奇即偶。

因为，$\tau[2\ 1\ 4\ 3] = 2$，所以排列2 1 4 3是偶排列；$\tau[3\ 1\ 4\ 2] = 3$，所以排列3 1 4 2是奇排列；$\tau[1\ 2 \cdots n] = 0$，所以排列$1\ 2 \cdots n$是偶排列。

例1　n元排列：$n\ n-1 \cdots 3\ 2\ 1$是偶排列还是奇排列？

解　先计算排列$n\ n-1 \cdots 3\ 2\ 1$的反序数。

排在1之前大于1的数有$n-1$个；

排在2之前大于2的数有$n-2$个；

排在3之前大于3的数有$n-3$个；

…　　…　　…　　…

排在$n-1$之前大于$n-1$的数有1个。

所以，$\tau[n\ n-1 \cdots 3\ 2\ 1] = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

因此，$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数时，$n\ n-1 \cdots 321$为偶排列；$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数时，$n\ n-1 \cdots 3\ 2\ 1$为奇排列。

例2　计算所有二、三元排列的反序数，并按奇偶性分别写出之。

解　二元排列共有两个，它们的反序数为：

$$\tau[1\ 2] = 0;\ \tau[2\ 1] = 1$$

所以，二元偶排列为：1 2；

二元奇排列为：2 1.

三元排列共有六个：1 2 3；2 3 1；3 1 2；1 3 2；2 1 3；3 2 1. 而

$\tau[1\ 2\ 3]=0$，$\tau[2\ 3\ 1]=2$，$\tau[3\ 1\ 2]=2$，$\tau[1\ 3\ 2]=1$，$\tau[2\ 1\ 3]=1$，$\tau[3\ 2\ 1]=3$.

所以

三元偶排列是：1 2 3；2 3 1；3 1 2

三元奇排列是：1 3 2；2 1 3；3 2 1.

此例说明：二（三）元排列中，奇、偶排列各占一半。这不是偶然的，对 n元排列来说也对，即奇、偶排列各占一半。为了证明这个结论，给出对换的概念。

定义 3　任意互换一个排列中两个数码的位置，叫做对该排列作一次对换，也简称为对换。

如果把一个排列：$\cdots i\cdots j\cdots$ 作一次对换 i 和 j 变为排列：$\cdots j\cdots i\cdots$时，则记作：

$$\cdots i\cdots j\cdots \xrightarrow{(i,j)} \cdots j\cdots i\cdots.$$

在上面各排列中$\cdots$所表示的元素都对应一样。

例如，对四元排列 3 1 4 2 作一次 2 与 3 两数码的对换，则有

$$3\ 1\ 4\ 2 \xrightarrow{(2,\ 3)} 2\ 1\ 4\ 3$$

关于对换有下列性质：

（1）若排列甲$\xrightarrow{(i,\ j)}$排列乙，则排列乙$\xrightarrow{(i,\ j)}$甲；

（2）若排列甲$\xrightarrow{(i_1,j_1)}\ \xrightarrow{(i_2,j_2)}\cdots\xrightarrow{(i_s,j_s)}$排列乙，则排列乙$\xrightarrow{(i_s,j_s)}\ \xrightarrow{(i_{s-1},j_{s-1})}\cdots\xrightarrow{(i_2,j_2)}\ \xrightarrow{(i_1,j_1)}$排列甲.

（3）对于任意二 n 元排列甲和乙，都可以用若干次对换把其中一个变为另一个，比如，

$$1\ 2\ 3\cdots n-1\ n \text{ 与 } i_1\ i_2\ i_3\cdots i_{n-1}i_n$$

可用如下一些对换把 $1\ 2\ 3\cdots n-1\ n$ 变为$i_1i_2i_3\cdots i_{n-1}i_n$.

如果 $i_1\neq 1$，则

$$1\ 2\ 3\cdots n-1\ n \xrightarrow{(1,i_1)} i_1 j_1 j_2 \cdots j_{n-1}.$$

此处$j_1, j_2, \cdots, j_{n-1}$为1，2，3，…，$n$中去掉 i_1所余下的$n-1$个数码。如果 $i_2 \neq j_1$，则有

$$1\ 2\ 3\ \cdots\ n \xrightarrow{(1,i_1)} i_1 j_1 j_2 \cdots j_{n-1} \xrightarrow{(j_1,i_2)} i_1 i_2 k_1 \cdots k_{n-2}$$

其中，$k_1, \cdots, k_{n-2}$为$1,2,\cdots,n$中去掉i_1, i_2后余下的数码。

如此继续下去，即可用若干次对换把$12\cdots n$变为$i_1 i_2 \cdots i_n$。

（4）若排列甲：$\cdots i s_1 s_2 \cdots s_k j \cdots$中，$i$ 与 j 之间隔有k个数码，作一次对换 (i,j) 把排列甲变为排列乙：$\cdots j s_1 s_2 \cdots s_k i \cdots$时，则可以用$2k+1$次相邻数码的对换把排列甲变为排列乙：

$\cdots i s_1 s_2 \cdots s_k j \cdots \xrightarrow{(i,s_1)} \xrightarrow{(i,s_2)} \cdots \xrightarrow{(i,s_k)}$ 得到排列 $\cdots s_1 s_2 \cdots s_k i j \cdots$

继续再作对换如下：

$$\cdots s_1 s_2 \cdots s_k i j \cdots \xrightarrow{(i,j)} \cdots s_1 s_2 \cdots s_k j i \cdots \xrightarrow{(s_k,j)} \xrightarrow{(s_{k-1},j)} \cdots \xrightarrow{(s_1,j)} \cdots j s_1 s_2 \cdots s_k i \cdots.$$

命题 1　如果排列$\cdots ij \cdots \xrightarrow{(i,j)} \cdots ji \cdots$则 $\tau[\cdots ij \cdots] = \tau[\cdots ji \cdots] \pm 1$。即作一次相邻数码的对换，改变排列的奇偶性。

证明　容易看出

$$\tau[\cdots ji \cdots] = \begin{cases} \tau[\cdots ij \cdots] + 1 & \text{当 } i < j \text{时} \\ \tau[\cdots ij \cdots] - 1 & \text{当 } i > j \text{时} \end{cases}$$

所以，不论那种情况，反序数 $\tau[\cdots ji \cdots]$的奇偶性与 $\tau[\cdots ij \cdots]$的奇偶性相反。因此，排列：$\cdots ji \cdots$与排列：$\cdots ij \cdots$的奇偶性相反，证完。

由命题1容易推出：

推论 1　排列经偶数次相邻数码的对换后，奇偶性不变；经奇数次相邻数码的对换后，改变奇偶性。

由对换的性质（4）知，任一对换都可用奇数个相邻数码的对换实现，所以有

推论 2　排列经一次对换后改变奇偶性。

命题 2　$n(>1)$元排列的集合S_n中，奇、偶排列各有$\frac{n!}{2}$个.

证明　设S_n中奇、偶排列分别为 s 个和 t 个，于是有$s+t=n!$. 只要证得$s=t$，则命题 2 成立。为此用一个对换，比如(1，2)去作用S_n中的每一个奇排列，则由推论 2，S_n 中的 s 个奇排列都变为 n 元偶排列．又因不同的奇排列用同一个对换（1，2）作用，变得的排列也都不同。所以，s 个奇排列经对换(1，2)以后，得到 s 个不同的偶排列。而所有的偶排列共为 t 个，因此必有：$s\leqslant t$。同理可证：$t\leqslant s$，故有$s=t$。即得：

$$s=\frac{n!}{2},\quad t=\frac{n!}{2}，证完。$$

命题 3　设$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$和$j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$是两个$n$元排列．同时交换上述两个排列的第 s个和第 t个数码，即把第一个排列作对换：(i_s,i_t)，第二个排列作对换：(j_s,j_t)，得到排列：

$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$和$j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$

则$\tau[i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n]+\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n]$与$\tau[i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n]+\tau[j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n]$奇偶性相同。

证明

由推论 2 知：

$\tau[i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n]$与$\tau[i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n]$的奇偶性相反，

$\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n]$与$\tau[j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n]$的奇偶性相反，所以

$\tau[i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n]+\tau[i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n]=$奇数

$\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n]+\tau[j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n]=$奇数

因此有

$$\tau[i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n]+\tau[i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n]+\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n]+\tau[j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n]=偶数$$

即

$(\tau[i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n]+\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n])+(\tau[i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n]$

$+\tau[j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots i_n])=$ 偶数。

所以，命题3结论成立。

最后，应用排列的奇偶性来揭示一下二、三阶行列式中各项前面所带的符号的规律。

二阶行列式中，

冠以正号的项：行下标排成自然排列后，列下标的排列为：1 2；

冠以负号的项：行下标排成自然排列后，列下标的排列为：2 1；

三阶行列式中，

冠以正号的项：行下标排成自然排列后，列下标的排列为：1 2 3；2 3 1；3 1 2；

冠以负号的项：行下标排成自然排列后，列下标的排列为：1 3 2；2 1 3；3 2 1。

综合上述，可以看出如下规律：

项前冠以正号，当且仅当行下标排成自然排列后，列下标的排列为偶排列；

项前冠以负号，当且仅当行下标排成自然排列后，列下标的排列为奇排列。

显然，上述规律不受行列式的阶数为二或三的约束。

练 习 二

1．计算下列排列的反序数：

（1） 5 2 3 1 4 6 8 7 9

（2） 1 3 5 7 2 4 6 8

（3） 1 3 5 $\cdots(2n-1)$ 2 4 $\cdots 2n$

2．选择 i 与 j，使

（1） 1 2 7 4 i 5 6 j 9 是偶排列；

（2） 1 i 2 5 j 4 8 9 7　是奇排列，

3．设排列$i_1i_2\cdots i_n$是1，2，…，n 的一个排列，它的反序数为 t，试求排列$i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$的反序数。

4．写出所有 4 元排列。

5．任一排列都可经过与其反序数相同次数的对换化为自然排列。

6．证明：$\tau[1i_2\cdots i_n]=\tau[(i_2-1)(i_3-1)\cdots(i_n-1)]$

其中$i_2i_3\cdots i_n$为2，3，…，n的一个排列。

§ 3　n 阶行列式

有了上两节的准备，将很自然的得出 n 阶行列式的概念。

首先，应用上节给出的二、三阶行列式各项前边符号的规律，对二、三阶行列式的定义就能用统一的方式表达得更加透彻。

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \left(A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right)$$为二（三）阶方阵。

以A的既不同行又不同列的二（三）个元素之积：$a_{1i_1}a_{2i_2}$ $(a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3})$作项，

项 $a_{1i_1}a_{2i_2}(a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3})$冠以符号：

$(-1)^{\tau[i_1i_2]}((-1)^{\tau[i_1i_2i_3]})$

于是，这样一切可能的2！(3！)项的代数和：

$$\sum_{i_1i_2\in s_2}(-1)^{\tau[i_1i_2]}a_{1i_1}a_{2i_2}$$

$$\left(\sum_{i_1i_2i_3\in s_3}(-1)^{\tau[i_1i_2i_3]}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\right)$$

叫做二（三）阶方阵A的行列式。记作

$$\det A = \sum_{i_1 i_2 \in S_2} (-1)^{\tau[i_1 i_2]} a_{1 i_1} a_{2 i_2}$$

$$\left(\det A = \sum_{i_1 i_2 i_3 \in S_3} (-1)^{\tau[i_1 i_2 i_3]} a_{1 i_1} a_{2 i_2} a_{3 i_3} \right)$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \in S_2} (-1)^{\tau[i_1 i_2]} a_{1 i_1} a_{2 i_2}$$

$$\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 i_3 \in S_3} (-1)^{\tau[i_1 i_2 i_3]} a_{1 i_1} a_{2 i_2} a_{3 i_3} \right)$$

显然，在上述的二、三阶行列式的这个表述中已经不受方阵A的阶数是二或三的约束，完全具备了一般行列式概念的各个要素：项数，项的构成，符号，取和。这样，就自然地引出了n阶行列式的概念。

定义 1　设n阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

代数和：

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} \qquad (1)$$

叫做A的行列式，记作：$\det A$**或**$|A|$**。n阶方阵A的行列式叫做n阶行列式，也记作：**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}.$$

此处 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n}$ 表示对所有n元排列取和。

当$n=2,3$时，这里的定义与以前的二、三阶行列式是一致的。

这里需要强调：

（1）按定义1，每一个 n 阶方阵$A=(a_{ij})$ 都有一个唯一确定的行列式：

$$\det A=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n}(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

（2）n阶方阵与n阶行列式不能混为一谈，它们有联系又有区别。本质的区别在于n阶行列式是一个代数和，其结果是一个数，叫做行列式的值。而n阶方阵是一个表，一般来说不是数，它体现一些数的位置关系。从符号上看，阵用圆括号，行列式用的是两个竖直线段。

（3）代数和（1）共有$n!$项，从这个代数和可以清楚看出，这$n!$项中每一项的构成恰好是取自方阵A的不同行、不同列 n 个元素作乘积。项前冠以正（负）号，当且仅当该项的列下标所成的排列：$i_1i_2\cdots i_n$ 是偶（奇）排列。因而冠以正号和冠以负号的项各为$\frac{n!}{2}$个。

（4）对于行列式中各元素的下标，和二、三阶行列式的情况一样，主要作用是标明该元素所在之位置。只要行列式给定，那末它的各个元素的位置就确定了，所以不必再写出下标。这时一点也不妨碍确定各项前面的正、负号。

下面根据行列式的定义，给出几个特殊n阶行列式计算值的结果。

命题1 上（下）三角形阵的行列式的值等于其对角线上n个元素之积。即，若

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

则$\det A = a_{11}\ a_{22}\cdots a_{nn}$。

证明　下面就下三角形阵的行列式作证明，上三角形的情况作为练习。

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & 0 & \\ & * & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

我们分析一下n阶行列式的各个项。根据下三角形阵的特点，第一行元素中除去a_{11}外，都等于0。所以，除去

$$a_{11}\ a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

这样的项，其它各项必为零。

同理，在形如：$a_{11}\ a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$的项当中，因为已有第一列的元素，所以不能有$i_2 = 1$。故除去$i_2 = 2$，其余各项都等于0，即除去

$$a_{11}\ a_{22}\ a_{3 i_3}\ \cdots\ a_{n i_n}$$

这样的项，其它各项都为0。

如此继续推理下去，便有，除去

$$a_{11}\ a_{22}\ \cdots\ a_{nn}$$

这样一项外，其余所有各项都为0，而$\tau[12\cdots n] = 0$，所以

$$\det A = a_{11}\ a_{22} \cdots a_{nn}.$$

由命题1显然有

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

命题2　设$A = (a_{ij})$中有一行(列)元素全为0，则$\det A = 0$。

事实上，若A有一行（列）元素全为0时，根据行列式定义，行列式的每一项是A中不同行不同列n个元素的乘积。所以$\det A$中

的每一项必有一个元素为0，从而$\det A=0$。

命题3　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则　$\det A=a_{11}\cdot\det A_1$。

证明　由定义

$$\det A=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n\in S_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

因为A的第一行除a_{11}外，其它各元素都为0，所以除去$i_1=1$的项，其它各项都等于0。所以有

$$\begin{aligned}\det A&=\sum_{1 i_2\cdots i_n\in S_n}(-1)^{\tau(1 i_2\cdots i_n)}a_{11}\,a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=a_{11}\sum_{1 i_2\cdots i_n\in S_n}(-1)^{\tau(1 i_2\cdots i_n)}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=a_{11}\sum_{i'_2\cdots i'_n\in S_{n-1}}(-1)^{\tau(i'_2\cdots i'_n)}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\\&=a_{11}\cdot\det A_1\end{aligned}$$

此处，$i'_2=i_2-1$，…，$i'_n=i_n-1$。证完。

根据定义1，任意不同行、不同列的n个元素之积，都是n阶行列式中的一项．所以，n阶行列式中的项又可写为

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

其中，$i_1i_2\cdots i_n$与$j_1j_2\cdots j_n$是两个n元排列。

按定义1，行列式中各项的符号，是在行下标为自然排列时，由列下标所成的排列的奇偶性来决定。下面讨论一下，在行下标的排列是一般n元排列时，如何去确定该项的符号。

命题4　n阶行列式中的项：$a_{i_1j_1}\ a_{i_2j_2}\cdots\ a_{i_nj_n}$的符号是
$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$

证明　按行列式的定义，确定项

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

的符号，必须将行下标排成自然排列。为此，把项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$中的元素互换位置。如果经过 s 次互换两个元素的位置，得到

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

这时，行下标的排列$i_1\ i_2\cdots i_n$和列下标的排列$j_1\ j_2\cdots j_n$，经这 s 次互换两个元素的位置变为$1\ 2\cdots n$和$k_1\ k_2\cdots k_n$。于是，由上节命题 3 可知：$\tau[i_1i_2\cdots i_n]+\tau[j_1j_2\cdots j_n]$ 的奇偶性与 $\tau[1\ 2\cdots n]+\tau[k_1k_2\cdots k_n]$的奇偶性相同。所以有：$(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]+\tau[j_1j_2\cdots j_n]}=(-1)^{\tau[1\ 2\cdots n]+\tau[k_1k_2\cdots k_n]}=(-1)^{\tau[k_1k_2\cdots k_n]}$

但是，由行列式定义，$(-1)^{\tau[k_1k_2\cdots k_n]}$为项

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\text{即}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

的符号。于是命题得证。

上面对方阵定义了行列式的概念，现在把它扩展到一般矩阵上去，先看一个具体例子。

设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -5 & 0\end{pmatrix}.$$

这是一个三行四列矩阵，因此说矩阵A的行列式是没意义的。因为A只有三个行，所以不能组成四阶行列式。但是，用A的元素去组成三阶行列式是可能的，而且能作出好几个三阶行列式。比如，取 1 、 2 、 3 列则得到三阶方阵

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 4 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

从而得到一个三阶行列式

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix},$$

取 1、2、4 列，得到三阶方阵

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到一个三阶行列式

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

类似地还能作出一些三阶行列式．当然，也可由矩阵 A 的元素，组成一些二阶行列式．比如，取 A 的 1、2 两列，1、3 两行交叉位置的元素，得到一个二阶方阵

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

从而得到一个二阶行列式

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$

由上述看出，虽然一个 $m \times n$ 矩阵不一定能确定一个行列式，但是，如上那样用矩阵 A 的元素却能组成许多阶数较低的行列式．这些行列式对于刻划矩阵 A 的性质，有着重要意义．为此给出：

定义 2　设 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

对任一正整数$r \leqslant min(m,n)$，由A中任取 r 个不同的行，r 个不同的列，其交叉位置上的元素（保持元素间原来的次序）确定一个r 阶方阵：

$$B=\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_r} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} i_1<i_2<\cdots<i_r; \\ j_1<j_2<\cdots<j_r, \end{matrix}$$

B 的行列式 $\det B$ 称为矩阵A的一个r阶子（行列）式。

例 1　写出矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

的所有子式。

解　从矩阵A的阶数最高的子式作起，因为A只有三个行，所以A的子式阶数最高为 3 。

A的三阶子式共有四个，前边已经写出了两个。另两个是：

取 1 、 3 、 4 列得一三阶方阵：

$$B_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到A的又一个三阶子式：

$$\det B_3=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

取 2 、 3 、 4 列得一三阶方阵：

$$B_4=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

从而得到A的第四个三阶子式：

$$\det B_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

下面来看A的二阶子式。

取A的第一、第二两行可以得A的六个二阶子式如下：

取1、2列，得二阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$；取1、3列，得二阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$；取1、4列得二阶子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$；取2、3列，得二阶子式为 $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$；取2、4列，得二阶子式为 $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$；取3、4列，得二阶子式为 $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$。

类似地，取A的第一、第三两行以及第二、第三两行，还能分别组成A的二阶子式各六个。这些二阶子式不再一一列举，作为练习，请读者自己写出来。由上述可知，A的二阶子式共有18个。

最后，A的一阶子式是显然的，即A的每一个元素都是A的一阶子式，所以A共有12个一阶子式，即A的12个元素。

特别的，对n阶方阵A来说，A的行列式$\det A$是A的一个n阶子式，它是A的唯一的一个阶数最高的子式。

例2 写出三阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

的所有子式。

解 A的子式中阶数最高的为3。A的三阶子式只有一个，即$\det A$。

二阶子式有：

由1、2行组成的有三个：

取1、2列，得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$；取1、3列，得 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$；

取2、3列，得：$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$；

由1、3行组成的有三个：

取1、2列，得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$，取1,3列，得 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$；

取2、3列，得 $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$；

由2、3行组成的也有三个：

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}.$$

A 的一阶子式共有9个，即 A 的9个元素：

$$\begin{matrix} 1, & -1, & 0 \\ 3, & 2, & -1 \\ 4, & 1, & -5. \end{matrix}$$

练 习 三

1．若 $a_{13}a_{2i}a_{32}a_{4k}$，$a_{11}a_{22}a_{3i}a_{4k}$ 和 $a_{i2}a_{31}a_{43}a_{k4}$ 为四阶行列式的项．试分别确定 i 和 k 使前两项所带符号为正，最后一项所带的符号为负．

2．判断下列乘积是否是五阶行列式的项，如是，标上该项所带的符号：

（1）$a_{13}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55}$　　（2）$a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$

（3）$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$　　（4）$a_{24}a_{32}a_{15}a_{43}a_{51}$

3．写出四阶行列式带负号且包含元素 a_{23} 的项．

4．用行列式定义计算下列行列式的值：

（1）
$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

（2）
$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ n & & & 0 \end{vmatrix}$$

（3）
$$D_3=\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ * & a_{2\,n-1} & \\ \iddots & & 0 \\ a_{n1} & & \end{vmatrix}$$

5．应用行列式定义证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

6．证明：若 n 阶行列式 D 中 0 的个数多于 n^2-n 个，则 $D=0$。

7．应用行列式定义，计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 & 1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

的展开式中 x^4 和 x^3 项的系数。

8．应用行列式定义，证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n。$$

9．写出下列矩阵的所有 3 阶子式。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$　(2) $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10．一个$m\times n$矩阵有多少个k阶子式?

§ 4　行列式的性质和计算

由于行列式的结果是一个数，所以计算行列式的值，是应用行列式解实际问题时，应当首先予以解决的问题．但是，根据行列式定义计算行列式的值，一般是很麻烦的，甚至有时是很难的．因此，需要借助行列式的一些性质，去寻求计算行列式的简便可行的一般方法．另外，行列式的一些基本性质也是应用行列式去论证问题的基础．

首先，我们指出行列式关于行、列的一种对称性质．

定理1　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ **叫做A的转置阵，用A'表示。**

则 $\det A'=\det A$。

证明　由定义$\det A=\sum_{i_1i_2\cdots i_n\in S_n}(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$

则由上节命题4，可把$\det A$写成下面的形式：

$$\det A = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

由于 a_{ij} 在 A' 中位于 j 行 i 列，所以由行列式定义，即得上式右端为 $\det A'$，即有

$$\det A = \det A'. \text{ 证完。}$$

由于 A 的转置阵 A' 的行是 A 的列，所以关于行列式的行证明了的结论，由定理 1 对于列也自然成立，就不必再另作证明。因此，以下有关行列式一般性质的命题，只就行予以论证。

命题 1 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \cdots & b_{kn}+c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \cdots & \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $\det A = \det B + \det C$.

用语言来描述就是：如果 A、B、C 是三个 n 阶方阵，除了第 k 行外其余各行都对应一样，而且 A 的第 k 行是 B 的第 k 行与 C 的第 k 行的和，则 A 的行列式等于 B 的行列式与 C 的行列式之和。

证明　由行列式定义，有

$$\det A = \sum_{i_1 \cdots i_k \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 \cdots i_k \cdots i_n]} a_{1 i_1} \cdots (b_{k i_k} + c_{k i_k}) \cdots a_{n i_n}$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_k \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 \cdots i_k \cdots i_n]} a_{1 i_1} \cdots b_{k i_k} \cdots a_{n i_n} +$$

$$\sum_{i_1\cdots i_k\cdots i_n\in S_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots c_{ki_k}\cdots a_{ni_n}$$

$=\det B+\det C$。证完。

上述性质叫做"单行可加性"。

命题 2　设

$$A=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ b_1 & b_2\ \cdots & b_n\\ & \cdots & \cdots\\ c_1 & c_2\ \cdots & c_n\\ & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \text{第}k\text{行}\\ \\ \text{第}l\text{行}\\ \\ \end{matrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ c_1 & c_2\ \cdots & c_n\\ & \cdots & \cdots\\ b_1 & b_2\ \cdots & b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \text{第}k\text{行}\\ \\ \text{第}l\text{行}\\ \\ \end{matrix}$$

则$\det B=-\det A$，即互换阵A的某两行得到B时，则阵B的行列式与A的行列式绝对值相同而符号相反。

证明　由于A与B只是第k行和第l行的元素不同，A中的第k行元素b_j在B中是第l行的元素，A中的第l行元素c_j在B中是第k行元素。所以，行列式$\det A$中任意一项：

$$a_{1i_1}\cdots b_{i_k}\cdots c_{i_l}\cdots a_{ni_n}$$

也是行列式$\det B$的项，反之也对。所以A的行列式$\det A$和B的行列式$\det B$包含相同的项。下面进一步说明，各项在$\det A$和$\det B$中所带的符号相反，命题即得证。对于项：

$$a_{1i_1}\cdots b_{i_k}\cdots c_{i_l}\cdots a_{ni_n}$$

来说，它在$\det A$中的符号为：$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n)}$。而在$\det B$中的符号为$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n)}$。这是因为$b_{i_k}$在$B$中位于$l$行，$c_{i_l}$位于$k$行，所以确定$a_{1i_1}\cdots b_{i_k}\cdots c_{i_l}\cdots a_{ni_n}$在$\det B$中的符号，须将行下标排列排成自然排列：$1\cdots k\cdots l\cdots n$。这样，就须将$b_{i_k}$和$c_{i_l}$交换位置。于是列下标的排列为$i_1\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n$。从而，在$\det B$中的符号为：

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n)}\text{。故有，}\det B=-\det A\text{。}$$

推论　若方阵A中有两行相同，则　$\det A=0$。

应用上述两个性质，可以证明行列式的一个重要定理——展开

定理．为此，引进两个概念：余子式和代数余子式．

前边对任意 $m\times n$ 矩阵定义了子式的概念，现在对 n 阶方阵来考察一下子式的情况．

设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 阶方阵．已经知道，任意取定 r 行、r 列相交处的元素（按原来的次序）组成一个 r 阶子式，记作 M．这时刚好有一个 $n-r$ 阶子式 $\overline{M}$ 被子式 M 唯一确定下来，它就是在 A 中去掉子式 M 所在的那 r 个行、r 个列之后，余下的元素所组成的 $n-r$ 阶子式．我们称 $\overline{M}$ 为 A 的关于子式 M 的**余子式**．或简称为 M 的余子式．显然，M 也是 $\overline{M}$ 的余子式．因此，称 M 与 $\overline{M}$ 为 A 的一对互余子式．

例 1

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

取 A 的1、2行，1、3列得一二阶子式：$M=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$．去掉 M 所在的行和列之后，余下的元素组成的二阶子式：$\overline{M}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$ 就是 M 的余子式．显然，$\overline{M}$ 是 A 的 3、4 行和 2、4 列所决定的二阶子式．如果去掉 $\overline{M}$ 所在的行和列之后，余下的元素所组成的二阶子式即为 M．

特别地，方阵 A 的每一个元素 a_{ij} 都是 A 的一阶子式，一阶子式 a_{ij} 的余子式我们约定用符号 M_{ij} 表示．为了叙述上的方便，我们引进代数余子式的概念．

设M为n阶方阵A的一个r阶子式，$\overline{M}$为M的余子式。如果子式M是取自A的$i_1,i_2,\cdots,i_r$行和$j_1,j_2,\cdots,j_r$列，则称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_r+j_1+j_2+\cdots+j_r}\overline{M}$$

为M的代数余子式。特别地，a_{ij}的代数余子式为$(-1)^{i+j}M_{ij}$，记作A_{ij}。

显然，M的代数余子式，或为$\overline{M}$，或为$-\overline{M}$。

例 2

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -5 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$$

在例 1 中所确定的二阶子式$M=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}$（取自$A$的1、2行，1、3列）的代数余子式为：

$$(-1)^{1+2+1+3}\overline{M}=-\overline{M}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 7\end{vmatrix}.$$

又如，取A的二阶子式$M_1=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}$（取自$A$的1、3行，2、4列），则$M_1$的余子式为：

$$\overline{M}_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

于是，M_1的代数余子式为：

$$(-1)^{1+3+2+4}\overline{M}_1=\overline{M}_1=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}.$$

又，关于第一行上的四个一阶子式的代数余子式：A_{11}，A_{12}，A_{13}，A_{14}分别为：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 0\\ -2 & 1 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 0\\ -2 & 1 & 7\end{vmatrix}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&-1&1\\4&-5&0\\0&1&7\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&-1&1\\4&-5&0\\0&1&7\end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2&1\\4&1&0\\0&-2&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&2&1\\4&1&0\\0&-2&7\end{vmatrix}$$

$$A_{14}=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&1&-5\\0&-2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&2&-1\\4&1&-5\\0&-2&1\end{vmatrix}.$$

定理 2 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，则

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

即，方阵A的行列式等于它的一行元素与其各自的代数余子式乘积之和。

证明 首先，把矩阵A变形：

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i1}+0+\cdots+0&0+a_{i2}+\cdots+0&\cdots&0+0+\cdots+a_{in}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

于是由命题 1，便有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots\quad\cdots&\cdots\quad\cdots&\cdots\quad\cdots\\ a_{i1}+0+\cdots+0&0+a_{i2}+\cdots+0&\cdots&0+0+\cdots+a_{in}\\ \cdots\quad\cdots&\cdots\quad\cdots&\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

下面只须证明

$$B_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij}A_{ij}$$

其中，A_{ij}为元素a_{ij}在A中的代数余子式。

对B_j作如下的变换：把第i行依次与前$i-1$个行互换位置，然后再把第j列与前$j-1$个列互换位置，于是由命题2，则有

$$B_j = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{i-1j} & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+1j} & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于a_{ij}在上面n阶行列式中，它的余子式就是a_{ij}在A中的余子式M_{ij}。所以，由上节命题3有：

$$B_j = (-1)^{i+j-2}a_{ij}\cdot M_{ij} = a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$$

将 B_j，$j=1,2,\cdots,n$代入原式，则有

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$。证完。

这就是行列式按行展开定理。由定理 1 有行列式的按列展开定理：

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \det A, j=1,2,\cdots,n.$$

定理 3 $a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0, i \neq j$. 即，方阵$A$中的一行元素与另一行元素的代数余子式对应之积的和等于 0 。对列来说，有：

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0,\ i \neq j.$$

证明 令

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & & \cdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由于矩阵B除去第 i 行与A的第 i 行不同以外，其余各行都对应相同。而 a_{ij}在A中的余子式 M_{ij}是从A中去掉第 i 行、第 j 列后，由余下的元素所构成的$n-1$阶子式，它与a_{ij}无关。所以，x_j在B中的余子式与a_{ij}在A中的余子式相同，等于 M_{ij}。从而 x_j的代数余子式$(-1)^{i+j}M_{ij}$等于a_{ij}在A中的代数余子式。于是将B按第 i 行展开，则有

$$\det B = x_1A_{i1} + x_2A_{i2} + \cdots + x_nA_{in}$$

上式对任意的 x_1，x_2，$\cdots$，x_n都成立。特别地，取 $x_1=a_{j1}$，$x_2=a_{j2}$，$\cdots$，$x_n=a_{jn}$ 时，等式左端的行列式中第 i 行与第 j 行相同，其值为 0 。故有：$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0, i \neq j$.

推论 若$m \times n$矩阵A的 r 阶子式都等于 0 ，则A的任一 $r+1$ 阶子式（如果存在）必等于 0 。

事实上，设D为A的任一$r+1$阶子式，把D按其第一行展开时：

$$D=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_{r+1}} \\ \cdots & & \cdots \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix}=a_{i_1j_1}A_{i_1j_1}+\cdots+a_{i_1j_{r+1}}A_{i_1j_{r+1}}$$

其中，$A_{i_1j_k}=(-1)^{1+k}M_{i_1j_k}$，而$M_{i_1j_k}$为$A$的$r$阶子式，故有，$D=0$。证完。

行列式的按行（列）展开定理也可表述为：A的一行上的所有一阶子式与其相应的代数余子式乘积之和，等于A的行列式$\det A$。与这个说法相适应的有更一般的展开定理。即

定理 4（*Laplace*） **设A为n阶方阵，任意取定A的$k(<n)$个行，则这k行上所有的k阶子式与其各自的代数余子式之积的和等于A的行列式$\det A$。**

证明从略。

行列式展开定理说明：一个n阶行列式，可以用n个$n-1$阶行列式表示。因此，可以从二、三阶行列式出发，归纳地给出n阶行列式的定义。

其次，根据展开定理，可以把高阶行列式的计算降阶为低阶的行列式的计算。

例 3　设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

计算A的行列式。

解（1）根据展开定理，按第三行展开之，有：

$$\det A=4\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}+(-5)$$

$$\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 7\end{vmatrix}$$

$$=4\times\left[(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\right]-5\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 7\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+3\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & 7\end{vmatrix}\right]$$

$$=4\times(8+2\times0)-5\times(16+3\times3)$$

$$=32-125=-93.$$

（2）应用 *Laplace* 定理来计算。

取定 3 、 4 两行。先写出这两行上不等于 0 的 2 阶子式及各自的代数余子式：

子式：

$$M_1=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix};\ M_2=\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix};\ M_3=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix},$$

$$M_4=\begin{vmatrix}0 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix};\ M_5=\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 1 & 7\end{vmatrix}.$$

代数余子式：

$$A_1=(-1)^{3+4+1+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix};A_2=(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix};$$

$$A_3=(-1)^{3+4+1+4}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix};A_4=(-1)^{3+4+2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix};$$

$$A_5=(-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

于是

$$\det A=M_1A_1+M_2A_2+M_3A_3+M_4A_4+M_5A_5$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}\cdot(-1)^{10}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & 1\end{vmatrix}(-1)^{11}\\
&\quad\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}\cdot(-1)^{12}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -5\\ -2 & 1\end{vmatrix}\\
&\quad\cdot(-1)^{12}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 1 & 7\end{vmatrix}\cdot(-1)^{14}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\\
&=-16+20+28+50-175=-93
\end{aligned}
$$

在上一章我们看到，初等变换在矩阵之间建立了联系，它把一个$m\times n$矩阵变为另一个与之相抵的$m\times n$矩阵。方阵（矩阵）的行列式（子式）是与其密切相关的一种数值表征。因此，我们自然会提出：如果方阵(矩阵)A经初等变换变为B，那么A的行列式（子式）发生什么变化？换句话说就是，如果A与B相抵，那么A与B的行列式（子式）之间有何必然联系？下面来讨论，与初等变换相联系的行列式的一些性质。

命题 3 设$A=(a_{ij})$为n阶方阵。则$\det[D_i(k)A]=k.\det A$。即，阵A经第i行乘以$k\neq 0$的倍法变换后，所得阵的行列式等于k乘A的行列式$\det A$。

证明 设

$$
A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \cdots & & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\text{则}D_i(k)A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & \cdots & & \cdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}
$$

根据行列式定义，有

$$
\begin{aligned}
\det[D_i(k)A]&=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in S_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\\
&\quad\cdots a_{nj_n}\\
&=k\sum_{j_1j_2\cdots j_n\in S_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\\
&\quad\cdots a_{nj_n}
\end{aligned}
$$

$$= k\cdot(\det A)$$

推论　若方阵A有两行元素成比例，则$\det A=0$。

证明　设A的第i行与第j行成比例，即

$a_{i1}=ka_{j1}$，$a_{i2}=ka_{j2},\cdots,a_{in}=ka_{jn}$（不妨令$i<j$）于是

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若$k=0$时，显然$\det A=0$。若$k\neq 0$，则由命题3有

$$\det A=k\begin{vmatrix} \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \end{vmatrix}=k\cdot 0=0$$

证完。

命题4　设$A=(a_{ij})$为n阶方阵，则

$$\det[P_{ji}(k)A]=\det A$$

即，方阵A经消法变换后，所得阵的行列式的值不变。

证明　设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}，则$$

$$P_{ji}(k)A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则由命题 1 和命题 3 之推论，可得

$$\det\left[P_{ji}(k)A\right]=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$=\det A+0=\det A$。证完。

命题 4 的意义不同一般。它说明用矩阵的消法变换作用于方阵 A 时，一般说来方阵 A 的形式变了但行列式的值不变。概括起来说就是：**形变值不变**（回顾消法变换对线性方程组的作用是：形变解不变）。

在第四章里已经知道，消法变换有简化矩阵形式的突出作用。特别地，任意方阵A只用消法变换就能化为三角形阵（第四章§3命题2）。从而，由命题4知，A的行列式的值等于三角形阵的行列式的值。于是，由本章§3命题1知其值等于三角形阵对角线上n个元素之积。这样，我们就得到一个简便易行的计算行列式的方法，它对于计算具体数字的行列式尤为方便。

例4　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

解　由命题3和命题4，对行列式作初等变换时可用等号联结起来，只是在作倍法变换时，要用$\dfrac{1}{k}$乘变化后所得的行列式。

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{P_{21}(-3),P_{31}(-4)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{P_{23}(-1)}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{P_{32}(-4),P_{42}(2)}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -21 & -20 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{vmatrix} \overset{P_{43}(-1)}{=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -4 & 13 \end{vmatrix} \overset{P_{43}(-4)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 93 \end{vmatrix} = -93.$$

例5　计算五阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解　经观察，该行列式每一行都是1、2、3、4、5这五个数，故其和都是15。因此，把行列式的二、三、四、五列都乘以1加到第1列上，则得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{P_{21}(1),P_{31}(1),P_{41}(1),P_{51}(1)} \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 15 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 15 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 15 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[D_1\left(\frac{1}{15}\right)]{} 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{P_{21}(-1),P_{31}(-1),P_{41}(-1),P_{51}(-1)}$$

$$15\times\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 15\times 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{P_{21}(3),P_{31}(2),P_{41}(1)} 15\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15\times 5^3 = 1875.$$

例6　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解 此行列式对角线上元素依次为：1、2、3、…、n，而其余元素都为2。因此，把第二行的－1倍分别加到其余各行：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} \xrightarrow{P_{12}(-1), P_{32}(-1), \cdots, P_{n2}(-1)} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = -2\cdot(n-2)!$$

例7 计算n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解 按第一列展开，则得

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{n+1} \times$$

$$\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$$

例 8 计算行列式

$$\mathbf{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & & \cdots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

这个行列式叫做 n 阶范德蒙(*Vandermonde*)行列式。

解

$$D_n \xrightarrow{P_{n\,n-1}(-a_1),P_{n-1\ n-2}(-a_1),\cdots,P_{32}(-a_1),P_{21}(-a_1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots & a_n^2 \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

显然最后一个因子是 $n-1$阶范德蒙行列式，用D_{n-1}代表，于是

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$$

把上述对D_n的化简手续用于D_{n-1}，得到：

$$D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)D_{n-2}$$

这里D_{n-2}是$n-2$阶范德蒙行列式。如此继续下去，最后

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_{n-1} & a_n\end{vmatrix}=a_n-a_{n-1}。$$ 故有

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})。$$

象上面这样的例子，把行列式的计算归结为形式相同而阶数较低的行列式的计算，叫做递推法。

例 9　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0\\ & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0\\ a_{k+1\,1} & \cdots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n}\\ & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解　（1）用Laplace定理，按前 k 行展开，则有

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

（2）应用本节命题 4，可将D中左上角的块化为下三角形，把右下角的块化为下三角形。即得：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & & & \cdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk}\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{k+1\,k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{k+2\,k+1} & b_{k+2\,k+2} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ b_{n\,k+1} & b_{n\,k+2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

这样，原行列式就为下三角形：

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{k+1\,1} & b_{k+1\,2} & \cdots & b_{k+1\,k} & b_{k+1\,k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{k+2\,1} & b_{k+2\,2} & \cdots & b_{k+2\,k} & b_{k+2\,k+1} & b_{k+2\,k+2} & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & b_{n\,k+1} & b_{n\,k+2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}b_{k+1\,k+1}b_{k+2\,k+2}\cdots b_{nn}$$

而 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & & \\ & b_{22} & 0 \\ * & & \ddots \\ & & & b_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{k+1\,k+1} & & \\ & b_{k+2\,k+2} & 0 \\ * & & \ddots \\ & & & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}) \cdot (b_{k+1\,k+1}b_{k+2\,k+2}\cdots b_{nn})$$

所以有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1\,k+1} & \cdots & a_{k+1\,n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例10 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

叫做反（斜）对称行列式。证明：n为奇数时，$D=0$。

证明　由于D与其转置行列式D'相等，所以

$$D=D'=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

由命题 3，每一行提出一个因子-1，则有：

$$D=D'=(-1)^nD$$

因n为奇数，所以有

$D=-D$，即 $2D=0$，$D=0$。证完。

练　习　四

1．计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ a & x-a & a & \cdots & a \\ a & a & x-a & \cdots & a \\ & \cdots & & \cdots & \\ a & a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_2 & a_2 & a & a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} & a \end{vmatrix}$

2. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 14 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 15 & 21 & 1 & 5 & 9 \\ 9 & 21 & 24 & 1 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$

3. 证明

(1) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

（2）$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

4．已知204、527、255都是17的倍数，证明行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

也是17的倍数。

5．设

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = d$$

问

（1）$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = ?$

（2）$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_n} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_n} \end{vmatrix} = ?$

6．如果n阶行列式的k阶子式M与$n-k$阶子式$\overline{M}$互为余子式，而S_M与$S_{\overline{M}}$分别表示M和$\overline{M}$的行下标与列下标之和，试问S_M与$S_{\overline{M}}$的奇偶性是否相同？

7. 若n阶行列式不等于0，那么它的所有$n-1$阶子式能否都为0，所有$n-2$阶子式能否都为0，为什么？

8. 试问能否将一r阶行列式写成与其值相等的$r+1$阶行列式？反之，一个r阶行列式能否写成与其值相等的$r-1$阶的行列式？$(r>1)$。

9. 计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(7) $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}$$

(8) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 1 & x & x & \cdots & 0 & x \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}$$

(9) $$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & b & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & b & \cdots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \quad (2n\text{阶})$$

(10) $$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

(11) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$, $a_i \neq 0$, $i=1, 2, \cdots, n$.

(12) $$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

10. 证明

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

(2) $$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

§ 5 矩阵的秩

在矩阵的理论中，一个方阵A的行列式不等于0（不论其值等于多少）这一事实，对方阵A有着重要意义。这在用二、三阶行列式求解线性方程组时，已有体现。一般地，对于一个矩阵A来说，它的不等于0的子式的阶数，对矩阵A来说也有着重要的意义。

由上节命题3和命题4可得重要的

定理1 设A为方阵，经初等变换A变为B。则 $\det A\neq 0$ 必要而且只要 $\det B\neq 0$。

亦即，初等变换使方阵A的"行列式不等于0"这一性质不变。

证明 只对行的初等变换证明，列的初等变换完全类似。

设 $A\xrightarrow{D_i(k)}B$, $k\neq 0$,则由上节命题3有：

$$\det B=k\det A$$

因此，$\det A\neq 0$必要而且只要 $\det B\neq 0$。

再设 $A\xrightarrow{P_{ij}(k)}B$，则由上节命题4有：

$$\det B=\det A$$

所以，自然有 $\det A\neq 0$必要而且只要$\det B\neq 0$。

一般地，有

定理2 设A为 $m\times n$ 矩阵，经初等变换A变为B，则A中存在r阶子式不等于0，必要而且只要在B中存在r阶子式不等于0。

证明 设$A\xrightarrow{D_i(k)}B$, $k\neq 0$。若M为A中不等于0的r阶子式，如果子式M没用到A的第i行，此时M也是B的r阶子式。

如果子式M用到了A的第i行，则在B中与M相应的r阶子式等于kM。

因此，对A的行作倍法变换得到B时，定理2成立。显然，对列作倍法变换定理2也成立。

下面证明，对A的行作消法变换，定理2成立。

设 $A\xrightarrow{P_{ij}(k)}B$，$M$为$A$中一个不等于0的$r$阶子式．下面就$M$的组成情况讨论．

（1）子式M没用到第i行，这时M也是B的r阶子式；

（2）子式M用到了第i行，同时也用到第j行．这时，B中与M相应的r阶子式为：

$$\widetilde{M}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{js_1} & \cdots & a_{js_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{is_1}+ka_{js_1} & \cdots & a_{is_r}+ka_{js_r} \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=M+k\begin{vmatrix} \cdots & & \cdots \\ a_{js_1} & \cdots & a_{js_r} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{js_1} & \cdots & a_{js_r} \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=M+k\cdot 0=M\neq 0.$$

即$\widetilde{M}$是B的一个r阶不等于0的子式．

（3）子式M用到了A的第i行，但未用到第j行．这时，B中与子式M相应的r阶手式为：

$$\widetilde{M}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{is_1}+ka_{js_1} & \cdots & a_{is_r}+ka_{js_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=M+k\begin{vmatrix} \cdots & & \cdots \\ a_{js_1} & \cdots & a_{js_r} \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix}$$

令 $M_1=\begin{vmatrix} \cdots & & \cdots \\ a_{js_1} & \cdots & a_{js_r} \\ \cdots & & \cdots \end{vmatrix}$，于是

$$\widetilde{M}=M+kM_1.$$

因为 $M\neq0$，所以$\widetilde{M}$与 M_1 不能同时等于 0．于是，如果$\widetilde{M}\neq0$，则 B 中存在 r 阶子式不为 0，即与M相应的 r 阶子式$\widetilde{M}$．

如果$\widetilde{M}=0$，则必有$M_1\neq0$。这个 M_1 虽然一般不一定是矩阵 B 的子式（因为M_1 所含有的 B 的第 j 行元素，有可能不是原来的次序），但是，只要把 M_1 中所含有的第 j 行元素，按照它在 B 中次序重排一下，就可得到 B 的一个 r 阶子式 M_2，而且 $M_2=\pm M_1$。故有 $M_2\neq0$，即在 B 中有一个 r 阶子式 $M_2\neq0$。所以，在与 M 相应的 r 阶子式$\widetilde{M}=0$时，B 中也有不等于 0 的 r 阶子式。

当$A\xrightarrow{P_{ij}(k)}B$时，必有$B\xrightarrow{P_{ij}(-k)}A$。所以，当 B 中有不为 0 的 r 阶子式，则在 A 中也必有 r 阶不等于 0 的子式。

对于列的消法变换来说，同理可证定理 2 成立。至此，定理 2 得到证明。

容易看出，定理 1 是定理 2 的特殊情形，即 $r=m=n$ 的情形。

下面通过一个例，说明一下定理 2 的含意。

例1 设

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{12}(-1)}$$

$$B=\begin{pmatrix}-2&-3&1&1&-1\\3&2&-1&1&1\\2&3&-1&-1&1\\1&4&-1&-3&1\end{pmatrix}.$$

用S_i 和 $T_i(i=1,2,3,4)$ 分别表示A和B的 i 阶子式的集合。则

$$S_1=\{1,\ -1,\ 0,\ 2,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ 4,\ -1,\ -3,\ 1\};$$

$$T_1=\{-2,\ -3,\ 1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ 1,\ 4,\ -1,\ -3,\ 1\};$$

$$S_2=\left\{\begin{vmatrix}1&-1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&0\\3&-1\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-3&1\end{vmatrix}\right\};$$

$$T_2=\left\{\begin{vmatrix}-2&-3\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\3&-1\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-3&1\end{vmatrix}\right\};$$

$$S_3=\left\{\begin{vmatrix}1&-1&0\\3&2&-1\\2&3&-1\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-1&1&1\\-1&-1&1\\-1&-3&1\end{vmatrix}\right\};$$

$$T_3=\left\{\begin{vmatrix}-2&-3&1\\3&2&-1\\2&3&-1\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-1&1&1\\-1&-1&1\\-1&-3&1\end{vmatrix}\right\};$$

$$S_4=\left\{\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\3&2&-1&1\\2&3&-1&-1\\1&4&-1&-3\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-1&0&2&0\\2&-1&1&1\\3&-1&-1&1\\4&-1&-3&1\end{vmatrix}\right\};$$

$$T_4=\left\{\begin{vmatrix}-2&-3&1&1\\3&2&-1&1\\2&3&-1&-1\\1&4&-1&-3\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}-3&1&1&-1\\2&-1&1&1\\3&-1&-1&1\\4&-1&-3&1\end{vmatrix}\right\}.$$

注意：S_i 和 T_i 含有的子式个数相等，但其中的子式并不完全一样．定理 2 的含意是：

S_i 中有不等于 0 的子式，必要而且只要 T_i 中有不等于 0 的子式．

比如，S_1中有不等于 0 的子式可推出 T_1 中有不等于0的子式，反之亦然；

S_2中有不等于 0 的子式可推出 T_2 中有不等于0的子式，反之亦

然；

S_3中没有不等于0的子式可推出T_3中没有不等于0的子式，反之亦然；

S_4中没有不等于0的子式可推出T_4中没有不等于0的子式，反之亦然。

由此可知，A中不等于0的子式的最高阶数为2，必要而且只要B中不等于0的子式的最高阶数为2。一般地，由定理2可得：

定理2′ 如果矩阵A经初等变换变为B。则A的不等于0的子式的最高阶数与B的不等于0的子式的最高阶数相等。即

初等变换使矩阵中"不等于0的子式的最高阶数"不变。

这个在初等变换下保持不变的数值，是相抵矩阵所具有的共性的一种体现。它对矩阵的性质和作用，有决定性的意义。下面给出矩阵论中一个基本概念。

定义 设$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$，a_{ij}不全为0。如果A的不等于0的子式最高阶数为r，则称r为A的秩数，或说A的秩为r。记作：$\mathrm{rank}A=r$；元素全为0的矩阵（叫做零矩阵）的秩数规定为0。

当$\mathrm{rank}A=r>0$时，A的每一个不等于0的r阶子式都叫做A的基础子式。

一般地，$m\times n$矩阵A的秩数$\mathrm{rank}A\leqslant\min(m,n)$。对于方阵$A$，$\mathrm{rank}A=n$必要而且只要$\det A\neq0$。今后称秩为$n$的$n$阶方阵为满秩阵或非奇异阵。

应用矩阵的秩数，可将定理2′叙述为：初等变换不变矩阵的秩数。但要注意，基础子式经过初等变换后，可能变成0。这一点在定理2的证明中已有所体现。而且，在上面的例1中，也可以具体地看出来。比如，按定义，例1中的矩阵A的秩为2。A中1、3行，1、2列所组成的二阶子式

$$M=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq0$$

是A的一个基础子式。但是A经过初等变换后和M相应的二阶子式为

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$

因而，$\overline{M}$不是B的基础子式。

由此顺便看出，秩为r的矩阵并非任一r阶子式都是基础子式。

有了矩阵的秩数概念和定理2′，可以给出矩阵相抵的充分必要条件，同时也解决了第四章最后所遗留的一个问题。

定理 3　两个 $m\times n$ 矩阵A和 B 相抵，必要而且只要 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$。

证明　必要性由秩数的定义和定理2′可直接得到。下面证明充分性。

设 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B=r$。应用初等变换把$A$化成标准形，则有：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}=D_r$$

由定理2′，$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}D_r=r$。所以标准形阵 D_r中 1 的个数必等于A的秩数r。同理，B的标准形中 1 的个数也必等于r。从而A与B有相同的标准形，用D_r表示此标准形，则有：

$$A\longrightarrow D_r，\quad B\longrightarrow D_r。$$

于是，由相抵的对称性，有

$$D_r\longrightarrow B$$

再由相抵的传递性，即得：

$A\longrightarrow B$。定理 3 得证。

定理 3 表明：用相抵关系把n阶方阵加以分类，恰好可以分成$n+1$个类：

秩为 0 的类：R_0

秩为 1 的类：R_1

$\vdots$

秩为 $n-1$的类：R_{n-1}

秩为 n 的类：R_n。

在上述各类中，R_0 和 R_n 比较特殊。R_0中只有一个方阵，即零阵；R_n 中的 n 阶方阵的行列式都不等于 0，而且行列式不等于 0 的 n 阶方阵也都在 R_n中，所以 R_n恰由所有 n 阶满秩阵所组成。

最后讲几个例子说明一下计算矩阵的秩数和求基础子式的方法。

例 2 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩和一个基础子式。

解 在例 1 中我们已经断言：$\operatorname{rank}A=2$，但是，没作具体计算。下面来说明，如何去计算 A 的秩。

（1）按秩的定义去计算。

一般地，从低阶子式作起。若 A 不是零阵，则 A 的秩至少等于 1。如果 A 的所有二阶子式都等于 0 时，可知 A 的不等于 0 的子式的最高阶数就是 1，即 $\operatorname{rank}A=1$。

对于本例的矩阵 A 来说，它有不等于 0 的二阶子式。比如，1、2 行和 1、2 列所组成二阶子式就不等于 0。因此，按秩的定义，A 的秩至少为 2，即 $\operatorname{rank}A\geqslant 2$。如果 A 的所有三阶子式都等于 0 时，则 A 的不等于 0 的子式，最高阶数为 2，即 $\operatorname{rank}A=2$。

此例中 A 的所有三阶子式的确都等于 0，但要证实这一点并不容易。因为此例中的矩阵 A 的三阶子式共有40个，一个一个的找出来，再一一去计算其值，显然这种作法是非常麻烦的。因此，计算矩阵的秩，只有对于特殊类型的阵，才用这种方法。

（2）应用初等变换计算矩阵的秩。

定理2′告诉我们：初等变换不变矩阵的秩数．因此，只须应用初等变换将矩阵A化简，然后，再就化简后的矩阵求出其秩数而得矩阵A的秩。

因为对于本例中的矩阵A，早已知道：

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

到此一看便知：$\mathrm{rank}A=2$。

下面来求A的一个基础子式。

在已知A的秩为2的前提下，可知A中任一二阶不等于0的子式都是基础子式。

如 $M=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$就是一个。

例3 计算下列矩阵的秩：

（1）
$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

（2）
$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解 （1）$a_1,a_2,\cdots,a_n$中不等于0的元素个数即为A的秩。

（2）因为 $\det B=0$，所以$\mathrm{rank}B\leqslant 2$．而在$B$中二阶子式
$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$，所以$\mathrm{rank}B=2$。

例4 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

则 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A'$。

证明　如果 M 是A的k阶子式，则M'即为A'的k阶子式，而且$M'=M$。所以有

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A'.$$

练　习　五

1．在秩为 r 的矩阵中，有没有等于零的 $r-1$ 阶子式？有没有等于0的 r 阶子式？有没有不等于0的 $r+1$阶子式？

2．求作一个秩为4的 6×5 矩阵，使得它有两行是：
1 0 1 0 0；1 -1 0 0 0。

3．计算下列矩阵的秩

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4．在3题的矩阵中，各求出一个基础子式。

5．如果矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \text{和} B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qm} \end{pmatrix}$$

的秩分别为 s 和 t，则

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qm} \end{pmatrix}$$

的秩为 $s+t$。

6．若矩阵A有一r阶子式不等于0，而所有$r+1$阶子式都等于0，则 $\text{rank}A=r$。

7．设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

不是零阵，且 a_{ij}都是实数。如果A的每一元素 a_{ij}都等于它的代数余子式，则 $\text{rank}A=n$。

8．证明：矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的秩等于0或1的充分必要条件是：有 $m+n$ 个数：$a_1,a_2,\cdots,a_m$；$b_1,b_2,\cdots,b_n$，使得

$$a_{ij}=a_ib_j,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n.$$

习 题 五

1．用定义计算

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

2．计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} b & b & b & b & a \\ b & b & b & a & b \\ b & b & a & b & b \\ b & a & b & b & b \\ a & b & b & b & b \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$，$abcd \neq 0$

(3) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & & & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，$a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$．

3．对下列 n 阶行列式 D_n，指出：

$$D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2})$$

并求 D_n 的值：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

4．计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$

5．解方程

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 & 1 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-2)-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}-x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0$

6．令

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & C_3^2 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

计算 $f(x+1)-f(x)$。此处 C_m^k 表示组合数。

7．计算行列式

(1) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \cdots & hx & h \end{vmatrix}$

8．设 A 和 B 都是 n 阶方阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$= 2^n \det A \cdot \det B$。

9．求下列矩阵的秩

(1) $\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b_2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix}$

10．若 $D_r \neq 0$为矩阵A中某一 r 阶子式。如果A中所有含 D_r 的 $r+1$阶子式都等于0时，则 $\text{rank}A = r$。

第六章　线性方程组的理论

有了第五章的准备，就可以把线性方程组的诸系数和常数项，与求解问题之间的直接联系揭示出来。并将进一步通过引进向量作为工具，对线性方程组的通解给出进一步结果。

§1　线性方程组的有解条件

设一般线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

则（1）的表示矩阵和系数矩阵分别为：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

用行的初等变换把$\overline{A}$，同时也把A化简，使A化简为B型阵。为明确起见，不妨假定B型阵中的r个特殊列在前r列，则有

$$\overline{B}=\begin{pmatrix}1 & & & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1\\ & 1 & & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2\\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1\ c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r\\ 0 & 0\cdots 0 & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots 0 & & 0 & \cdots & 0 & d_m\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & & & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n}\\ & 1 & & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n}\\ & & \ddots & & & \\ & & & 1\ c_{rr+1} & \cdots & c_{rn}\\ 0 & 0\cdots 0 & & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots 0 & & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

在第四章§2已知：

（1）有解的充分必要条件是 $d_{r+1}=\cdots=d_m=0$。

现在应用矩阵的秩数容易揭示出 $d_{r+1}=\cdots=d_m=0$ 的充分必要条件。

实际上，$\overline{B}$ 和 B 的秩数只可能有两种关系：

（i）$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\overline{B}$ 必要而且只要：$d_{r+1}=d_{r+2}=\cdots=d_m=0$

（ii）$\operatorname{rank}\overline{B}=\operatorname{rank}B+1$ 必要而且只要 d_{r+1}，d_{r+2}，$\cdots$，d_m 中至少有一个不等于0．于是有

线性方程组（1）有解的充分必要条件是 $\operatorname{rank}\overline{B}=\operatorname{rank}B$

但 $\overline{B}$ 与 $\overline{A}$ 相抵，B 与 A 相抵，所以有

$$\operatorname{rank}\overline{B}=\operatorname{rank}\overline{A},\ \operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A.$$

于是得到用矩阵的秩数表述的有解条件：

定理1 设 $\overline{A}$ 和 A 分别是线性方程组（1）的表示矩阵和系数矩阵，则线性方程组（1）有解的充分必要条件是

$$\text{rank}\overline{A} = \text{rank}A$$

当线性方程组(1)有解时，则由定理1有$\text{rank}\overline{A} = \text{rank}A = r$. 这时就说线性方程组（1）的秩为$r$. 于是又得到用矩阵的秩数确定解的个数的

定理2 若线性方程组（1）的秩为r，则

（i） $r=n$ 时，线性方程组（1）有唯一解；

（ii） $r<n$ 时，线性方程组（1）有无穷多个解.

如果把线性方程组（1）的常数项全换为0，这样得到的齐次线性方程组叫做（1）的导出齐次组.

由定理2可以得到：

推论1 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

系数阵$A=(a_{ij})$，则

线性方程组（2）有唯一解，必要而且只要 $\det A \neq 0$.

推论2 齐次线性方程组必有解. 未知数的个数多于方程个数的齐次线性方程组必有无穷多解，从而有非0解. 特别地，（2）的导出齐次组有非0解必要而且只要 $\det A = 0$.

上述两个推论都是明显的.

例1 判断下列线性方程组是否有解，如果有解确定解的个数.

（1）$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

解（1）先写出表示矩阵，然后用行的初等变换化简：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

到此可以看出：$\text{rank}\overline{A} = \text{rank}A = 2$。所以，由定理 1 知方程组（1）有解，并由定理 2 知此方程组有唯一解。

（2）写出表示矩阵，然后用行的初等变换化简：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-3)P_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是得到：$\text{rank}\overline{A} = \text{rank}A = 2$。所以（2）有解，并且有无穷多个解。（因未知数个数为 3）。

（3） 写出表示矩阵化简：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-3)P_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此可知：$\operatorname{rank}\overline{A}=3$，$\operatorname{rank}A=2$。所以（3）无解。

例 2　证明：线性方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ x+by+b^2z=0 \\ x+cy+c^2z=0 \end{cases} \tag{3}$$

没有非 0 解。其中，a、b、c 是两两不等的数。

证明　只须指出方程组（3）只有唯一解即可，由推论 1 只须计算（3）的系数阵的行列式，看其值是否不为 0。

（3）的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

因为 $D'=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ 是范德蒙行列式，所以有　$D=D'=(b-a)(c-a)(c-b)$

由题设 a、b、c 两两不等，所以 $D\neq 0$。故方程组（3）没有非 0 解。

例 3　讨论线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_2 \qquad = a \\ \qquad\quad x_2-x_3=b \\ -x_1 \quad +tx_3=c \end{cases} \tag{4}$$

有解的条件。

解　所谓讨论有解条件，是指 t、a、b、c 取什么值时能使：$\operatorname{rank}\overline{A}=\operatorname{rank}A$，以及 $r=3$ 或 $r<3$。

为此用初等变换化简 $\overline{A}$。

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & b\\ -1 & 0 & t & c\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{31}(1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 0 & -1 & t & a+c\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}(1)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & a\\ 0 & 1 & -1 & b\\ 0 & 0 & t-1 & a+b+c\end{pmatrix}$$

由此，可知

（1） $t-1\neq 0$时， $\text{rank}\overline{A}=\text{rank}A=3$，此时，（4）有唯一解；

（2）$t=1$， 而且 $a+b+c=0$ 时，$\text{rank}\overline{A}=\text{rank}A=2$， 此时，（4）有无穷多解.

（3）$t=1$，但 $a+b+c\neq 0$，则 $\text{rank}\overline{A}=3$， $\text{rank}A=2$ 此时，（4）无解.

练 习 一

1．判断下列方程组是否有解，在有解的情形下确定解的个数.

（1）$\begin{cases}x+x_2+2x_3+3x_4=1\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4\end{cases}$

（2）$\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=1\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=4\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=6\\ x_2+2x_2-4x_3-4x_4=-1\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\qquad -3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$

2. 判断下列齐次线性方程组是否有非0解。

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0 \\ x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=0 \\ x_1+17x_2+4x_3=0 \end{cases}$

3. 讨论λ、a、b 取什么值下列方程组有唯一解，无穷多个解，无解。

(1) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$

4. 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数阵的秩等于矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩，证明这个线性方程组有解。

5．证明：线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$$

有解的充分必要条件是：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$。

6．证明：含 n 个未知数 $n+1$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \\ a_{n+1\,1}x_1+\cdots+a_{n+1\,n}x_n=b_{n+1} \end{cases}$$

有解的必要条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ a_{n+1\,1} & \cdots & a_{n+1\,n} & b_{n+1} \end{vmatrix}=0$$

并举一反例说明这个条件不是充分条件。

7．证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+x_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是：系数阵 A 的行列式 $\det A \neq 0$。

8．在什么条件下，三条直线：

l_1： $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

l_2： $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

l_3： $a_3x + b_3y + c_3 = 0$

通过同一点。

9．给出四点： $M_1(x_1, y_1)$， $M_2(x_2, y_2)$， $M_3(x_3, y_3)$， $M_4(x_4, y_4)$ 在同一圆上的条件。

10．讨论下列三个平面的位置关系。

π_1： $2x + 3y + 4z + 1 = 0$

π_2： $x - 2y - 2z - 1 = 0$

π_3： $2x - 11y - 12z - 5 = 0$

§2　线性方程组的公式解——克莱姆（Cramer）法则

在第五章§1，对二、三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

在系数阵的行列式不等于 0 的条件下，已经分别给出解的公式：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

与

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

现在有了n阶行列式的概念，并已掌握了一些基本性质，于是可以把上述结果推广到一般情形。

定理1 〔克莱姆（*Cramer*）法则〕设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

用D表示系数阵$A=(a_{ij})$的行列式。则当 $D\neq0$ 时，（1）有唯一解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D} \tag{2}$$

其中 D_j 是把D中的第j列用（1）的常数项替换而成的n阶行列式，$j=1, 2,\cdots,n$。

证明　由本章§1定理2的推论1知，当$D\neq0$时，方程组（1）有唯一解。所以，只须证明（2）是方程组（1）的解，定理1即

得证。

为此，将 $x_j=\frac{D_j}{D}$，$j=1,2,\cdots,n$，即（2），代入方程组（1）的第 i 个方程左端得：

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}$$

$$=\frac{1}{D}(a_{i1}D_1+a_{i2}D_2+\cdots+a_{in}D_n)$$

将上式中的 D_j 按第 j 列展开，则有

$$=\frac{1}{D}[a_{i1}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_iA_{i1}+\cdots+b_nA_{n1})+$$
$$+a_{i2}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_iA_{i2}+\cdots+b_nA_{n2})+\cdots$$
$$+a_{in}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\cdots+b_iA_{in}+\cdots+b_nA_{nn})]$$

$$=\frac{1}{D}[b_1(a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n})$$
$$+b_2(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+\cdots+a_{in}A_{2n})$$
$$+\cdots+b_i(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+\cdots$$
$$+b_n(a_{i1}A_{n1}+a_{i2}A_{n2}+\cdots+a_{in}A_{nn})]$$

$$=\frac{1}{D}(b_1\cdot 0+b_2\cdot 0+\cdots+b_i\cdot D+\cdots+b_n\cdot 0)$$

$$=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由此可知，（2）是方程组（1）的解。证完。

第五章§1的命题是克莱姆法则当 $n=2$、3的特例。

克莱姆法则只适用于含 n 个未知数、n 个方程的线性方程组，而且必须系数阵的行列式不等于0的情形。下面进行推广，给出广义的克莱姆法则以适用于一般线性方程组。

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (3)$$

的秩等于m,这时必有$m \leqslant n$。为讨论方便起见,设系数阵$A=(a_{ij})$的前m列所组成的m阶子式D是一个基础子式，即$D \neq 0$。于是线性方程组（3）改写成下面的形式后：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1-a_{1m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2-a_{2m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mm}x_m=b_m-a_{mm+1}x_{m+1}-\cdots-a_{mn}x_n \end{cases} \quad (3)'$$

把$x_{m+1},\cdots,x_n$看作可任意取值的参数时，则方程组（3）′就是未知数的个数与方程个数相同，而且系数阵的行列式不等于0的方程组。于是，应用克莱姆法则，便得方程组（3）′即（3）的通解表达式：

$$x_j=\frac{\overset{(\text{第 } j \text{ 列})}{\begin{vmatrix} \cdots & b_1-a_{1m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{1n}x_n & \\ & b_2-a_{2m+1}x_{m+1}-\cdots-a_{2n}x_n & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_m-a_{mm+1}x_{m+1}-\cdots-a_{mn}x_n & \end{vmatrix}}}{D}, \quad j=1,2,\cdots,m.$$

为了与第四章应用消元法所得到的通解表达式比较，把上述m个式子的每个分子，应用行列式的单列可加性展开，得到：

$$x_j=\frac{1}{D}\left\{\overset{(j\text{ 列})}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots b_1\cdots a_{1m} \\ a_{21}\cdots b_2\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots b_m\cdots a_{mm} \end{vmatrix}}-\overset{(j\text{ 列})}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1m+1}\cdots a_{1m} \\ a_{21}\cdots a_{2m+1}\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mm+1}\cdots a_{mm} \end{vmatrix}}\cdot x_{m+1}\right.$$

$$\left.-\cdots-\overset{(j\text{ 列})}{\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n}\cdots a_{1m} \\ a_{21}\cdots a_{2n}\cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn}\cdots a_{mm} \end{vmatrix}}\cdot x_n\right\}, j=1,2,\cdots,m.$$

我们约定：用 D_j 表示把D中的第 j 列换成方程组（3）的常数项而成的行列式，用 D_{jk} 表示把D中的第 j 列换成（3）的系数阵A的第 k 列而成的行列式（$k=m+1,\cdots,n$）。于是，方程组（3）′，即（3）的通解表达式可写为下面的形式：

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{D_1}{D} - \dfrac{D_{1\,m+1}}{D} t_{m+1} - \cdots - \dfrac{D_{1n}}{D} t_n \\
x_2 = \dfrac{D_2}{D} - \dfrac{D_{2\,m+1}}{D} t_{m+1} - \cdots - \dfrac{D_{2n}}{D} t_n \\
\quad\vdots \\
x_m = \dfrac{D_m}{D} - \dfrac{D_{m\,m+1}}{D} t_{m+1} - \cdots - \dfrac{D_{mn}}{D} t_n \\
x_{m+1} = t_{m+1} \\
\quad\vdots \\
x_n = t_n
\end{cases}
\tag{4}
$$

其中 $t_{m+1},\cdots,t_n$ 为数域F中任意数。

概括上述，得到广义克莱姆法则如下：

如果线性方程组（3）的系数阵的秩等于方程个数 m：$\mathrm{rank}A=m$，则（3）必有解。若A的前m列组成的m阶子式D为一基础子式，即 $D\neq 0$，则（4）即为方程组（3）的通解公式。

注：如果A的前m列所组成的子式 $D=0$，则在A中取基础子式D^*，设D^*是由A的 j_1，$j_2,\cdots,j_m$ 列组成的，则通解公式（4）中所出现的未知数应为：x_{j_1}，x_{j_2}，$\cdots$，x_{j_m}，其余$n-m$个未知数作为参数的形式出现。

为以后叙述方便，把系数阵的秩等于方程个数的线性方程组叫做克莱姆型的线性方程组。于是，克莱姆型的方程组必有解，而且可用克莱姆法则求解。

下面进一步讨论线性方程组的秩 r（即$\mathrm{rank}\,\overline{A}=\mathrm{rank}A=r$），小于方程个数$m$时的公式解。

定理 2　设线性方程组（3）的秩r小于方程个数m。则

（1）系数阵A的任一基础子式所在的r个方程所构成的方程

组（3）″与方程组（3）同解。

（2）（3）″是克莱姆型的线性方程组，从而可用克莱姆法则写出（3）″的，即（3）的通解公式。

证明　只要（1）被证明，则（2）是自明的。

无损于一般性，不妨假设基础子式D所在的方程就是前r个方程，而且D就在A的前r列上。这样，（3）与（3）″的表示矩阵分别为：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1r} & a_{1r+1}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{r1}\cdots a_{rr} & a_{rr+1}\cdots a_{rn} & b_r \\ a_{r+11}\cdots a_{r+1r} & a_{r+1r+1}\cdots a_{r+1n} & b_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}\cdots a_{mr} & a_{mr+1}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1r} & a_{1r+1}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{r1}\cdots a_{rr} & a_{rr+1}\cdots a_{rn} & b_r \end{pmatrix}$$

对$\overline{A}$的前r行作初等变换，把$\overline{A}$，同时也就把$\overline{B}$，化简为下面的形式：

$$\overline{A_1}=\begin{pmatrix} 1 & & & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ a_{r+11} & \cdots\cdots & & a_{r+1r+1} & \cdots & a_{r+1n} & b_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mr+1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\overline{B_1}=\begin{pmatrix} 1 & & & c_{1r+1}\cdots c_{1n} & d_1 \\ & 1 & & c_{2r+1}\cdots c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \cdots\cdots\cdots & \\ & & 1 & c_{rr+1}\cdots c_{rn} & d_r \end{pmatrix}$$

由于$\operatorname{rank}\overline{A_1}=\operatorname{rank}\overline{A}=r$， 所以继续对$\overline{A_1}$作行的初等变换必能把$\overline{A_1}$化简为下面形式：

$$\overline{A_2}=\begin{pmatrix} 1 & & & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 1\ c_{r\,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 \cdots 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是方程组（3）与以$\overline{A_2}$为表示矩阵的线性方程组同解；而（3）″与以$\overline{B_1}$为表示矩阵的线性方程组同解。

但是，以$\overline{A_2}$为表示矩阵的线性方程组与以$\overline{B_1}$为表示矩阵的线性方程组，实际上是相同的方程组（至少可以说是同解的）。所以，（3）与（3）″同解。证完。

例 1　判断线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2 \quad\quad +2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+4x_2-x_3-3x_4=1 \end{cases} \tag{5}$$

是否有解，如有解，用克莱姆法则求解（写出通解公式）。

解　1）写出方程组（5）的表示矩阵$\overline{A}$，然后对$\overline{A}$的行作初等变换进行化简（通常，把系数阵的部分化为B型阵），确定$\overline{A}$和系数阵的秩数。

由第五章 §5 例 2 的计算知，$\overline{A}$和A的秩都为 2 。所以，方程组（5）有解。又因，$\operatorname{rank}A=2<n=4$，故（5）有无穷多个解。

2）应用克莱姆法则求方程组（5）的通解公式。

为此，先从方程组（5）中确定一个与（5）同解的克莱姆型方程组。因为方程组（5）的秩为 2 ，所以，由定理 2 从方程组（5）

的系数阵中取一个非 0 的二阶子式，此二阶子式所确定的两个方程所组成的方程组，即为与（5）同解的克莱姆型方程组．

因系数阵左上角的二阶子式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5$，于是，$D$ 所在的两个方程所组成的克莱姆型方程组为：

$$\begin{cases} x_1-x_2 \qquad\quad +2x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=1 \end{cases} \tag{5$'$}$$

3）用克莱姆法则解克莱姆型方程组（5）$'$．

把（5）$'$改写成

$$\begin{cases} x_1-x_2=-2x_4 \\ 3x_1+2x_2=1+x_3-x_4 \end{cases}$$

于是，（5）$'$即（5）的通解公式为：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{D}\left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}t_3-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}t_4\right) \\ \quad =\dfrac{1}{5}(1+t_3-5t_4) \\ x_2=\dfrac{1}{D}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}t_3-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}t_4\right) \\ \quad =\dfrac{1}{5}(1+t_3+5t_4) \\ x_3=t_3 \\ x_4=t_4 \end{cases} \tag{6}$$

（6）就是方程组（5）的通解公式．

比如，令 $t_3=0$，$t_4=0$．则 $x_1=\dfrac{1}{5}$，$x_2=\dfrac{1}{5}$，$x_3=0$，$x_4=0$ 就是方程组（5）的一个具体的解．

如再令 $t_3=0$，$t_4=1$．则 $x_1=-\dfrac{4}{5}$，$x_2=\dfrac{6}{5}$，$x_3=0$，$x_4=1$ 是方程组（5）的又一个具体的解．

这个例子有一般性，它体现了用克莱姆法则求线性方程组的公

式解的三个步骤，即

1）写出表示矩阵作行的初等变换化简，求表示矩阵$\overline{A}$和系数阵A的秩，由此判断线性方程组是否有解。

2）在有解时，即$\text{rank}\,\overline{A}=\text{rank}A$，确定一个与原方程组同解的克莱姆型方程组。

为此，找出系数阵A的一个基础子式D，D所占有的r个方程所构成的线性方程组，即为所求的与原方程组同解的克莱姆型方程组。

3）应用克莱姆法则，求出通解公式。

这一步关键在于记住通解公式（4）中的行列式：

$$
\begin{aligned}
&D_1,\ D_{1r+1},\ \cdots,\ D_{1n};\\
&D_2,\ D_{2r+1},\ \cdots,\ D_{2n};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&D_r,\ D_{rr+1},\ \cdots,\ D_{rn};
\end{aligned}
$$

的构成规律。

这里需要指出：线性方程组的公式解的重要特点，或者说它不同于消元法所得到的通解表达式的，在于用方程组的系数直接表出了解。

公式解的主要意义在论证问题方面，一般很少用克莱姆法则去求解。这是因为，应用克莱姆法则求解，需要计算很多行列式，计算量相当大。

即使明确要求用克莱姆法则求解时，一般也是先用初等变换求出表示矩阵和系数阵的秩，再找出一个基础子式来。因此，初等变换在线性方程组理论的各个方面是一个经常起作用的方法。

练 习 二

1．用克莱姆法则解下列线性方程组

(1) $\begin{cases} \qquad\quad x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1 \qquad\quad -2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2 \qquad\quad -5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3 \qquad\quad =5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1 \\ 4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_1+2x_2+2x_3+6x_4=3 \\ x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$

2. 求一二次多项式$f(x)$，使$f(1)=1$，$f(-1)=9$，$f(2)=3$。

3. 设 a_1，a_2，…，a_{n+1} 是 $n+1$ 个不同的数，b_1，b_2，…，b_{n+1} 是 $n+1$ 个任意数. 证明：存在唯一一个次数不超过 n 的多项式$f(x)$，使：

$$f(a_i)=b_i,\ i=1,2,\cdots,n+1.$$

4. 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$， 应用线性方程组的理论证明：若$f(x)$ 有 $n+1$ 个不同根，则 $f(x)$是零多项式。

§3 线性方程组解之间的关系

研究线性方程组解之间的关系，当然是对有解的线性方程组而言的。当线性方程组有解时，它的解的个数，从上节的讨论知道，只有两种可能：只有一个解；有无穷多个解。

对只有一个解的情形，当然，无所谓解之间的关系问题。因此，讨论解之间的关系，只有对有无穷多个解的方程组才有意义。

研究解之间的关系，除了对求通解有重要意义外，对线性方程组有关问题的论证也是不可缺少的。

为了明确解之间的关系的具体内容和意义，下面证明两个简单但十分重要的命题。为此，先作一点名称和符号上的准备，以便于行文和论述。

对于含 n 个未知数的线性方程组来说，n 个数 a_1，a_2，…，a_n 是它的解的含义，在第四章中已有规定。这里需要明确的是：这 n 个数一起叫做方程组的一个解，而不能误说成为 n 个解。因此，n 个数作为方程组的一个解是一个整体。为以后讨论问题方便，把方程组的一个解作为一个整体，用希腊字母 α，β，… 等来表示，并记为：$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

这时就说 α 是方程组的一个解，而把 $a_i(i=1,\ 2,\cdots,n)$ 叫做解 α 的第 i 个分量。相邻二分量之间的逗点可写可不写，写上主要是为了清楚。

设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

其导出齐次组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \quad (2)$$

命题1　若 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与 $\xi=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是齐次线性方程组（2）的两个解，k 为数域 F 中任意的数，则

（1）$ka_1, ka_2, \cdots, ka_n$ 这 n 个数也是（2）的一个解；

（2）$a_1+t_1, a_2+t_2, \cdots, a_n+t_n$ 这n个数也是（2）的一个解。

证明　用代入的办法直接验算即可得证。

如果，我们把解 $(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$ 叫做解 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的k倍，并记作：$k\alpha$；把解 $(a_1+t_1, a_2+t_2, \cdots, a_n+t_n)$ 叫做解 α 与 ξ 的和，并记作：$\alpha+\xi=(a_1+t_1, a_2+t_2, \cdots, a_n+t_n)$时，则命题1所揭示的齐次线性方程组的这一重要性质，就可概括而准确地表述为：

1）齐次线性方程组的任一解的 k 倍也是它的解；

2）齐次线性方程组任二解之和也是它的解。

推论　若 α_1, α_2 为齐次线性方程组（2）的解，k_1, k_2 是任意数，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 也是（2）的解。一般地，若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都是（2）的解，$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 是任意 s 个数，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$ 也是（2）的解。

命题2　若 $\gamma=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$与$\delta=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非齐次线性方程组（1）的两个解，则 $c_1-d_1, c_2-d_2, \cdots, c_n-d_n$ 这n个数恰是（1）的导出齐次组（2）的解。

证明　用代入的方法直接验算即可得证。

如果把解 $(c_1-d_1, c_2-d_2, \cdots, c_n-d_n)$ 叫做γ与δ的差，记作：$\gamma-\delta$。则命题2便可表述为：非齐次线性方程组的任意两个解的差，恰是它的导出齐次组的解。

由上面的论述，进一步可以得到

定理 令 γ_0 为（1）的一个取定的解．当 α 取遍（1）的导出齐次组的所有解时，则 $\gamma_0+\alpha$ 就是（1）的所有解．

证明 令 γ 为（1）的任一解，则由命题2有：$\gamma-\gamma_0$ 是（1）的导出齐次组的解，设它为 α．则有：$\gamma-\gamma_0=\alpha$．而 $(\gamma-\gamma_0)+\gamma_0=\gamma_0+\alpha$，通过具体验算知，左端：$(\gamma-\gamma_0)+\gamma_0=\gamma$，所以有

$$\gamma=\gamma_0+\alpha$$

上式表明，方程组（1）的任一解都可表为取定的解 γ_0 与（1）的导出齐次组的一个解 α 之和．

另一方面，容易验证：$\gamma_0+\alpha$ 都是方程组（1）的解．

综合上述得，当 α 取遍（2）的所有解时，则所有 $\gamma_0+\alpha$ 即为（1）的所有解．证完．

上述定理表明：求非齐次线性方程组的通解，基本上归结为求其导出齐次组的通解．

命题1及其推论表述的是齐次线性方程组所特有的性质，对非齐次线性方程组来说一条也不成立．

齐次线性方程组的这一性质，寓意深刻颇有启发．正是由于这两条性质，使得我们对齐次线性方程组的每一个解，都不应当看成是孤立的．事实上，如果已知 α 是齐次线性方程组的一个解，则 2α，3α，$(-1)\alpha$，$(-2)\alpha$，…，以至 α 的任意一个倍数 $k\alpha$，都是该齐次线性方程组的解．这样，从已知一个解 α 出发，自然就“生出”无穷多个解来，它们的每一个都用倍数的形式与已知的 α 联系着．

再如，已知齐次线性方程组的两个解 α_1 和 α_2，则由 α_1、α_2 各生出无穷多个解来：

$k_1\alpha_1$，$k_2\alpha_2$；k_1，k_2 为任意的数．

进而把这些无穷多解任意作和，于是又生出比已有的无穷多个解可能更多得多的解．它们都与已知的 α_1 与 α_2 用倍数和的形式联系着：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$；k_1，k_2 为任意的数．

一般来说，如果已知齐次线性方程组的有限个解：α_1，α_2，$\cdots$，α_s，那么用倍数与相加的办法，由这s个解就能生出许许多多的解来，它们都与已知的解α_1，α_2，$\cdots$，α_s用倍数和的形式联系着：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s;\ k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_s\in F.$$

上述事实给我们以宝贵的启发，自然产生一种期望：最好有办法求出齐次线性方程组的有限个解α_1，α_2，$\cdots$，α_s，使得这s个解能够生出齐次线性方程组的所有解．这时，齐次线性方程组的每一个解β都是α_1，α_2，$\cdots$，α_s的倍数和的形式：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s.$$

这就等于说，用这有限个解就把齐次线性方程组的无穷多个解，全都确定出来了．

指出这种期望的实际可能性，正是下一步要研究解决的主要课题．即证明这样的有限个解是存在的，同时还给出了求这样有限个解的具体方法．

例　齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2\qquad\ +2x_4=0\\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=0\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0\\ x_1+4x_2-x_3-3x_4=0 \end{cases}\tag{*}$$

是§2例1中的非齐次线性方程组的导出齐次组．

由§2例1知其系数阵的秩为2，并可求出其通解公式为：

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{5}(t_3-5t_4)\\ x_2=\frac{1}{5}(t_3+5t_4)\\ x_3=t_3\\ x_4=t_4 \end{cases}\tag{*}'$$

当取$t_3=1$，$t_4=0$时，得到(*)的一个解：

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ 1,\ 0\right)$$

当取 $t_3=0$，$t_4=1$ 时，得到（*）的另一解：

$$\alpha_2=(-1,\ 1,\ 0,\ 1).$$

由(*)′知，(*)的任意一个解 α 为：

$$\alpha=\left(\frac{1}{5}(t_3-5t_4),\ \frac{1}{5}(t_3+5t_4),\ t_3,\ t_4\right)$$

而 $\alpha=t_3\alpha_1+t_4\alpha_2$.

于是对给定的齐次线性方程组来说，找到了两个解：$\alpha_1=\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ 1,\ 0\right)$，$\alpha_2=(-1,\ 1,\ 0,\ 1)$，使得齐次线性方程组（*）的每一个解都能表为它们的倍数和的形式：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

进一步，对于例1（§2）来说，已知它有一个具体的解：$\gamma_0=\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},0,0\right)$（参看§2例1），于是，由本节定理，则

$$\gamma_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2;\quad k_1,\ k_2\ \text{为任意数}$$

即为§2例1中的非齐次线性方程组的所有解.

在下一节，对上述的作法，将从理论上加以论述.

§4　n 维向量的线性相关性及基础解系

考虑数域F上的 $1\times n$ 矩阵，即1行 n 列矩阵. 一个$1\times n$ 矩阵也叫一个 n 元数组. 由于 $n=2$，3时，2元数组、3元数组有明显的几何意义，即它们分别是平面上的向量和空间中的向量. 因此，我们这里也借用这种几何名称，把一个 n 元数组叫做 n 维向量. 不过，当 $n>3$ 时，n 维向量不再具有直观的几何形象.

n 维向量的概念有很大的概括性，如 n 元线性方程组的每一个解都是 n 维向量；每个方程的系数也是 n 维向量，如果把常数项也考虑在内，那么它就是一个 $n+1$ 维向量. 再如，一个 $m\times n$ 矩阵的每一行都是一个 n 维向量，它的列则是m维向量. 如果再往前追溯，那么任意一个 n 次多项式的全体系数，则是一个 $n+1$ 维向量.

今后用小写希腊字母去表示 n 元数组.

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),a_i\in F$$

α叫做数域F上的n维向量，数a_i叫做向量α的第i个分量。

为清楚起见，这里在相邻二分量之间加上了逗点。以下如无具体说明，向量都指的是n维向量。

数域F上所有n维向量的集合，用$F^{(n)}$表示，这时每一个F上的n维向量α，叫做$F^{(n)}$的元素。

由矩阵相等的定义可知：

$F^{(n)}$中两个元素：$\alpha=(a_1, a_2,\cdots,a_n)$与

$$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

相等：$\alpha=\beta$当且仅当$a_i=b_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

为了讨论$F^{(n)}$中元素之间的关系，我们在$F^{(n)}$的元素（n维向量）之间规定两种运算如下：

（1）倍数运算：$\forall\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in F^{(n)}$，$k\in F$，令

$k\alpha=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$，$k\alpha$叫做向量$\alpha$的$k$倍。

（2）加法运算：对于$F^{(n)}$中任二向量：

$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，令

$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$，$\alpha+\beta$叫做$\alpha$与$\beta$的和。

由于上面所规定的倍数运算和加法运算，是用分量通过数的乘法和数的加法规定的，所以，容易验证向量的运算有下列基本性质：

（1）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

（2）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

（3）存在向量θ，使

$\theta+\alpha=\alpha+\theta=\alpha$，$\forall\alpha\in F^{(n)}$。

显然，$\theta=(0,0,\cdots,0)$就有此性质，而且也只有这个$\theta=(0,0,\cdots,0)$才有此性质。今后，称$\theta=(0,0,\cdots,0)$为零向量。

（4）对每一个向量α，存在向量α'使

$\alpha+\alpha'=\alpha'+\alpha=\theta$

显然，$\alpha'=(-1)\alpha$就有此性质，而且只有这个$\alpha'=(-1)\alpha$才有此

性质。今后，称 $\alpha'=(-1)\alpha$ 为 α 的负向量，记为 $-\alpha$。

（5） $(kl)\alpha=k(l\alpha)$

（6） $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

（7） $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

（8） $1\cdot\alpha=\alpha$

（9） $k\alpha=\theta$ 当且仅当 $k=0$ 或 $\alpha=\theta$。

为了以后叙述问题方便，下面给出

定义1　设 V 是数域 F 上 n 维向量的任一非空集合，如果 V 满足下列条件：

（1） $\forall\alpha\in V$，$k\in F$，必有 $k\alpha\in V$

（2） $\forall\alpha,\beta\in V$，必有 $\alpha+\beta\in V$

则称 V 为数域 F 上的一个向量空间。

按定义1中的条件（1），直接可得：

F 上的向量空间 V 必含零向量 θ；

V 中每一向量 α 的负向量 $-\alpha$ 也必在 V 中。

因此，F 上的任一向量空间 V，都一定满足上述（1）—（8）诸条性质。

定义2　设 V 是 F 上的向量空间，V 的非空子集 S 本身是 F 上的向量空间时，则称 S 为 V 的子空间。

例1　$F^{(n)}$ 是 F 上的向量空间，而且 F 上的任一向量空间 V 都是 $F^{(n)}$ 的子空间。只含一个零向量 θ 的集合：$V_0=\{\theta\}$，按定义1也是 F 上的向量空间。

在上面的讨论中知道，任一向量空间必含零向量，所以 V_0 是每个向量空间的子空间。

从而可以说，$F^{(n)}$ 是最大的向量空间（由 n 维向量构成的），V_0 是最小的向量空间。

例2　任意齐次线性方程组的解作为 n 维向量，则其所有解向量所成的集合 S，即通解是一个向量空间，称 S 为此齐次线性方程组的解空间。

例 3 设V是一个向量空间，对于V中任意取定的t个向量：α_1，α_2，…，α_t，则

$$S=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t \mid k_i\in F\}$$

是V的子空间，叫做由α_1，α_2，…，α_t所生成的子空间，记作：$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t)$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_t$叫做生成元素。

下面按定义 2，具体验证S是V的子空间。

（1）$\forall \alpha\in S$，$k\in F$，则有

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$$

而 $$k\alpha=k(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t)=(kk_1)\alpha_1+(kk_2)\alpha_2+\cdots+(kk_t)\alpha_t$$

因为F是数域，所以 kk_1，$kk_2,\cdots,kk_t\in F$。从而有：$k\alpha\in S$。

（2）$\forall \alpha,\beta\in S$，则有

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t, \quad \beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t$$

而 $$\alpha+\beta=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t)+(l_1\alpha_2+l_2\alpha_2+\cdots+l_t\alpha_t)$$
$$=(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_t+l_t)\alpha_t$$

因为F是数域，所以$k_i+l_i\in F$，$i=1,2,\cdots,t$。

所以有$\alpha+\beta\in S$。因此，S是V的子空间。

我们讨论n维向量，主要是研究一组向量用倍数、相加这两种运算来表达的倍数和的一般性质。这不仅是研究齐次线性方程组的通解所必须的，对一般向量空间的研究也是不可缺少的基础。为此，给出如下的基本概念。

定义 3 设α_1，α_2，…，α_s是向量空间V的一组向量（也叫一个向量组），k_1，k_2，…，k_s是数域F中s个数，称这组向量的倍数和所确定的向量：

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

为α_1，α_2，…，α_s的线性组合，或者说，β可被α_1，α_2，…，α_s线性表示，而k_1，k_2，…，k_s叫做表示系数。

如果向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中每一向量都能被$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性表示，则称向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能被向量组$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_s$线性表

示。

能互相线性表示的两个向量组，叫做是等价的向量组。

例 4　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是向量空间 V 的任一向量组。于是，α_i 可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表示。即向量组中每一向量都能被此向量组线性表示。

事实上，

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\cdot\alpha_i + 0\cdot\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_s$$

例 5　$F^{(3)}$ 中的每一向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$，都能被向量组：$\varepsilon_1 = (1,0,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,0)$，$\varepsilon_3 = (0,0,1)$，线性表示：

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$$

例 6　设 $\alpha_1 = (1,2,3)$，$\alpha_2 = (1,0,2)$，$\alpha_3 = (2,2,4)$，试问 $\beta = (1,1,1)$ 能否被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示？β 能否被 α_1，α_2 线性表示？

解　看 β 能否被 α_1，α_2，α_3 线性表示，关键在于是否在数域 F 中存在三个数 k_1，k_2，k_3 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3.$$

将 β 和 α_1，α_2，α_3 具体代入上式，则有

$$\begin{aligned}(1,1,1) &= k_1(1,2,3) + k_2(1,0,2) + k_3(2,2,4)\\ &= (k_1 + k_2 + 2k_3,\ 2k_1 + 2k_3,\ 3k_1 + 2k_2 + 4k_3)\end{aligned}$$

由向量相等的规定，有

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 1 \\ 2k_1 \qquad + 2k_3 = 1 \\ 3k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

由上面的推导可以看出，表出 β 的表示系数 k_1, k_2, k_3 是线性方程组(*)的解；反之，(*)的解 k_1, k_2, k_3 必可作为 β 的表出系数，将 β 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示出来。

所以，解决 β 能否被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的问题，归结为去解分别以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的分量为列作为系数阵的线性方程组，此线性方程组的表示矩阵，恰由 α_1，α_2，α_3 以及 β 的分量作列组成的。

解之，得(*)有唯一解：

$$k_1=-1,\ k_2=-1,\quad k_3=\frac{3}{2}$$

所以，β可被α_1，α_2，α_3线性表示。

下面来回答β能否被 α_1，α_2 线性表示。

若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

将β，α_1，α_2具体代入上式，得：

$$\begin{aligned}(1,1,1)&=k_1(1,2,3)+k_2(1,0,2)\\&=(k_1+k_2,\ 2k_1,\ 3k_1+2k_2)\end{aligned}$$

由向量相等，得到

$$\begin{cases}k_1+k_2=1\\2k_1\qquad=1\\3k_1+2k_2=1\end{cases}$$

但上面的线性方程组无解，所以β不能被α_1，α_2线性表示。

例 7　零向量能被任意一组向量α_1，α_2，…，α_s线性表示。

这是因为，$\theta=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_s$。

现在，我们进一步看一下，用一组向量去表示零向量时，除了上述的表示系数都取 0 这种表法外，还有没有其它表示方法。

就例 6 中的向量α_1，α_2，α_3 来说，如果有

$$\theta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$$

将α_1，α_2，α_3具体代入上式，得

$$\begin{aligned}(0,0,0)&=k_1(1,2,3)+k_2(1,0,2)+k_3(2,2,4)\\&=(k_1+k_2+2k_3,\ 2k_1+2k_3,\ 3k_1+2k_2+4k_3)\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases}k_1+k_2+2k_3=0\\2k_1\qquad+2k_3=0\\3k_1+2k_2+4k_3=0\end{cases}$$

解之得：$k_1=k_2=k_3=0$

由此得到：零向量θ被α_1，α_2，α_3线性表示时，表示系数只能都取 0 。

我们再取一组向量：$\beta_1=(1,2,3)$，$\beta_2=(-1, 2,-3)$，$\beta_3=(0,-2,0)$。

首先，零向量 θ 被 β_1，β_2，β_3 线性表示，可取 0 作为表示系数：$\theta=0\beta_1+0\beta_2+0\beta_3$。

其次，对向量组 β_1，β_2，β_3 来说，线性表示零向量的办法还有很多。比如

$$\theta=\beta_1+\beta_2+2\beta_3,\quad \theta=2\beta_1+2\beta_2+4\beta_3,\quad \theta=\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{2}\beta_2+\beta_3,\text{ 等等。}$$

从上述可以看出：例 6 中的向量组 α_1，α_2，α_3 和上述的向量组 β_1，β_2，β_3 在表示零向量时，就其表法来看，前者除了表示系数全取 0 就别无其它方法。即，只有表出系数全为 0 时，它才能表出零向量。而后一组向量 β_1，β_2，β_3 则不然，表出零向量的表出系数可以不全取 0 。

其实，向量组在线性表出零向量上的这种差异，就最简单的情况，即对一个向量来说，就能看得出来。

事实上，当 $\alpha=\theta$，有：$\theta=k\alpha$，k 为任意的数。这说明，用任意数 k 作表出系数，α 都能表出零向量。

当 $\alpha\neq\theta$ 时，有：只要 $k\neq0$，则 $k\alpha\neq\theta$。这说明，只有表出系数是 0 时才能表出零向量。

由此可知，任意一组向量都能线性表出零向量，但表出的可能性有大、小的区别，即有的除了系数全取 0 之外，还可以用不全为 0 的数作表出系数，把零向量表示出来；有的只有系数全为 0 才能表出零向量。

这种区别是由向量组本身内部关系所决定的，是向量组本质属性的一种反映。对此，我们引出重要的

定义 4 向量空间 V 的一组向量 α_1，α_2，$\cdots$，α_s，如果能用一组不全为 0 的数 k_1，k_2，$\cdots$，k_s 作系数，线性表出零向量：

$$\theta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$$

则称向量组α_1，α_2，…，α_s 线性相关。如果只能由0作系数才能线性表出零向量，即

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$$

必须$k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_s=0$，则称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关。

例 8　只由一个向量 α 组成的向量组线性相关，必要而且只要 $\alpha=\theta$。

例 9　含两个向量的向量组 α 与 β 线性相关，必要而且只要 α 与 β 成比例：

$$\alpha=k\beta，\text{或 }\beta=k\alpha。$$

事实上，若 α 与 β 成比例：$\alpha=k\beta$，则有

$$\alpha-k\beta=\theta，\text{即 }1.\alpha+(-k)\beta=\theta$$

所以，α 与 β 线性相关。

反之，若 α 与 β 线性相关，则有不全为 0 的两个数：k_1 与 k_2 使：

$$k_1\alpha+k_2\beta=\theta$$

因k_1，k_2 不全为 0，不妨假定 $k_1\neq0$，用$\frac{1}{k_1}$乘上式，则得：

$$\alpha+\frac{k_2}{k_1}\beta=\theta。$$

上式两端同加上向量$-\left(\frac{k_2}{k_1}\beta\right)$，则得：

$$\alpha=k\beta，\text{此处，}\quad k=-\frac{k_2}{k_1}，$$

即 α 与 β 成比例。

例10　讨论向量组：$\alpha_1=(1,0,-1)$,$\alpha_2=(-1,2,3)$,$\alpha_3=(1,2,1)$的线性相关性。

解　按定义，判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是否线性相关，只需看是否有不全为 0 的数　k_1，k_2，k_3 使：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta \qquad (1)$$

把 α_1，α_2，α_3 具体代入上式，便有：

$$k_1(1,0,-1)+k_2(-1,2,3)+k_3(1,2,1)=(0,0,0)$$

整理之，得到

$$(k_1-k_2+k_3, 2k_2+2k_3, -k_1+3k_2+k_3)=(0,0,0)$$

由向量相等定义，则有

$$\begin{cases} k_1-k_2+k_3=0 \\ \quad 2k_2+2k_3=0 \\ -k_1+3k_2+k_3=0 \end{cases} \tag{2}$$

到此可知，存在不全为 0 的数k_1，k_2，k_3 使（1）成立，必要而且只要齐次线性方程组（2）有非 0 解。

因为（2）的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

所以，（2）有非 0 解，从而存在不全为 0 的数 k_1，k_2，k_3（即（2）的非 0 解）使（1）成立。所以，α_1，α_2，α_3 线性相关。

例11 证明：$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$线性无关。

证明 若

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=\theta$$

去证：k_1，k_2，$\cdots$，k_n 必须全等于 0。

将ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_n 具体代入上式，则得

$k_1(1,0,\cdots,0)+k_2(0,1,\cdots,0)+\cdots+k_n(0,0,\cdots,1)=(0,0,\cdots,0)$即

$$(k_1,k_2,\cdots,k_n)=(0,0,\cdots,0)$$

所以有

$$k_1=0, k_2=0, \cdots, k_n=0.$$

于是，根据定义，ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_n 线性无关。

下面指出线性表示与线性相关这两个基本概念的重要联系。

定理1 **向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s(s\geqslant 2)$线性相关，必要而且只要$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中至少有一个向量可被其余向量线性表示。**

证明 先证必要性。假设，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，于是有不全为0的 s 个数$k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$$

成立。因为，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为0，设 $k_i\neq 0$，则将 $k_i\alpha_i$ 移到等式另一端（即两端同加以$-k_i\alpha_i$），则有

$$-k_i\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s$$

用$-\dfrac{1}{k_i}$乘上式两端，则得

$$\alpha_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)\alpha_1+\cdots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)\alpha_{i-1}$$

$$+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)\alpha_{i+1}+\cdots+\left(\frac{-k_s}{k_i}\right)\alpha_s$$

必要性得证。

再证充分性。假设，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中至少有一向量可被其余向量线性表示，不妨设 α_i 可被其余向量：$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 线性表示。则有

$$\alpha_i=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s$$

成立。将 α_i 移到上式右端（即在两端同加以$-\alpha_i$），即得：

$$\theta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+(-1)\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_s\alpha_s$$

上式表明，$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关。

定理1中只说，至少有一个，但并没说具体是那一个能被其余的向量线性表示。不过，从证明过程中看出，表出零向量的表示系数 $k_i\neq 0$时则 α_i 就能被其余向量线性表示。

定理2 **若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，添加向量β后所得的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关时，则β可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性表示。**

换言之，若 $\alpha_1, \alpha_2,\cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，去掉β后其余向量：

α_1, α_2, …, α_s线性无关时，则β可被α_1, α_2, …,α_s线性表示。

证明　因为α_1, α_2, …, α_s, β线性相关，所以有$s+1$个不全为零的数k_1, k_2, …, k_s, k使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=\theta$$

要证β可被α_1, α_2, …, α_s线性表示，只须证明：上式中的$k\neq 0$即可。

用反证法。若$k=0$，则因k_1, k_2, …, k_s, k不全为0，所以有：k_1, k_2, …, k_s是s个不全为0的数。而且

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+k\beta=\theta$$

可写为：

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$$

因k_1, k_2, …, k_s不全为0，所以α_1, α_2,…,α_s线性相关。与题设α_1, α_2, …, α_s线性无关相矛盾。从而必有$k\neq 0$。于是得到：

$$\beta=\left(-\frac{k_1}{k}\right)\alpha_1+\left(\frac{-k_2}{k}\right)\alpha_2+\cdots+\left(\frac{-k_s}{k}\right)\alpha_s.$$

即，β可被α_1, α_2, …, α_s线性表示。

定义5　**设S是向量空间V的任意一组向量所组成的子集（可以含有无穷多个向量）而α_1, α_2, …, α_t是S中t个向量，如果**

（1）α_1, α_2, …, α_t线性无关；

（2）对于S中每一向量β，α_1, α_2, …, α_t, β都线性相关；

则称向量组α_1, α_2, …, α_t为S的一个极大线性无关组。

例12　设$S=\{\alpha\}$，即S只含一个向量α。当$\alpha\neq\theta$时，α就是S的一个极大线性无关组。当$\alpha=\theta$时，S没有极大线性无关组。

例13　设向量组

$$\alpha_1=(1,0,-1)$$

$$\alpha_2=(-1,2,3)$$

$$\alpha_3=(1,\ 2,\ 1)$$

因为

（1）α_1，α_2 线性无关（α_1与α_2 不成比例）

（2）α_1，α_2，α_3 线性相关（由本节例10）

所以，由定义5，α_1，α_2 是向量组 α_1，α_2，α_3 的极大线性无关组。

经过验证，可知：α_1，α_3，与 α_2，α_3 也都是 α_1，α_2，α_3 的极大线性无关组。

此例说明，向量组的极大线性无关组可能不只一个。

例14　$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)$，…，$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$是 $F^{(n)}$的一个极大线性无关组。

这是因为：

（1）ε_1，ε_2，…，ε_n 线性无关（由例11）；

（2）对于 $F^{(n)}$中任一向量 β，β 可被 ε_1，ε_2，…，ε_n 线性表示。所以，ε_1，ε_2，…，ε_n，β 线性相关。

故而，ε_1，ε_2，…，ε_n为 $F^{(n)}$ 的一个极大线性无关组。

命题1　任意有限个不全为0的向量 α_1，α_2，…，α_m 所组成的向量组，必有极大线性无关组。

证明　从 α_1，α_2，…，α_m 中第一个向量看起，若 $\alpha_1\neq\theta$，则 α_1 线性无关；若 $\alpha_1=\theta$，则 α_1 线性相关，去掉 α_1，继续考虑α_2。

假定，α_{i_1}，…，α_{i_r} 线性无关，考虑向量组：α_{i_1}，…，α_{i_r}，α_{i_r+1} 是否线性相关。如果线性无关，在此基础上再添加下一个向量α_{i_r+2}，继续观察 α_{i_1}，…，α_{i_r}，α_{i_r+1}，α_{i_r+2} 是否线性无关。如果，α_{i_1}，…，α_{i_r}，α_{i_r+1}线性相关，就去掉 α_{i_r+1}，然后添加 α_{i_r+2}继续观察 α_{i_1}，…，α_{i_r}，α_{i_r+2} 是否线性无关。这样继续作下去，作到有限步后，即可得到一组线性无关的向量组 α_{i_1}，…，α_{i_t}。

由上述的作法，可知从向量组α_1，α_2，…，α_m 中任取向量α_j，则向量组：α_{i_1}，…α_{i_t}，α_j 线性相关。

所以，α_{i_1}，…，α_{i_t}为向量组α_1，…，α_m 的极大线性无关组。

从上述命题的证明过程中，可以看出：向量组 α_1，…，α_m 当中

任意一部分线性无关的向量组，都可以扩充为α_1，…，α_m的一个极大线性无关组。

命题 2　设S是向量空间 V 的子集。S中的向量组α_1，α_2，…，α_t 是S的极大线性无关组，必要而且只要S中每一向量都能被α_1，α_2，…，α_t唯一地线性表示。

证明　先证必要性。设α_1，…，α_t 是S的一个极大线性无关组，则对于S中任一向量β，由定义5，α_1，α_2，…，α_t，β线性相关。于是，由定理2，β可被α_1，α_2，…，α_t 线性表示：$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$。

此外若还有另外的表示方法：$\beta=k'_1\alpha_1+k'_2\alpha_2+\cdots+k'_t\alpha_t$，

于是有：

$$\theta=(k_1-k_1')\alpha_1+(k_2-k_2')\alpha_2+\cdots+(k_t-k'_t)\alpha_t$$

但已知α_1，α_2，…，α_t 是极大线性无关组，所以上式成立必须：$k_i-k'_i=0$，$i=1$，2，…，t。

即，$k_i=k'_i$，$i=1$，2，…，t。

这就是说，S中任一向量可被它的极大线性无关组唯一地线性表示。

其次证明充分性。假定α_1，α_2，…，α_t 能把S中的每一向量β唯一地线性表示。先证：α_1，α_2，…，α_t 线性无关。

若α_1，α_2，…，α_t 线性相关，则有不全为0的t个数　k_1，k_2，…，k_t使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t=\theta$$

因为，k_1，k_2，…，k_t中必有不等于0的数，不妨设为$k_i\neq0$。于是，由

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\cdot\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_t$$

应用上面零向量用α_1，α_2，…，α_t 线性表示的关系式，得到：

$$\begin{aligned}\alpha_i+\theta=\alpha_i&=(0\alpha_1+\cdots+0\alpha_{i-1}+1\cdot\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_t)\\&\quad+(k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+k_i\alpha_i+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots\\&\quad+k_t\alpha_t)=k_1\alpha_1+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}+(k_i+1)\alpha_i\end{aligned}$$

$$+k_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+k_t\alpha_t$$

因为，$k_i \neq 0$，所以 $k_i+1\neq 1$。这与 α_i 可被 $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$ 唯一地线性表示相矛盾，故α_1，…，α_t线性无关。

其次，由于S中任一向量β，都能被 α_1，$\alpha_2\cdots$，α_t线性表示，所以由定理1，α_1，α_2，…，α_t，β线性相关。

综合上述，α_1，α_2，…，α_t 为S的极大线性无关组。

命题2说明了极大线性无关组对一个子集的意义。

定理3 设向量空间V的任意一组向量：

$$\alpha_1=(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})$$
$$\alpha_2=(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_m=(a_{1m},\ a_{2m},\ \cdots,\ a_{nm})$$

应用这m个向量的分量作列组成一个 $n\times m$ 矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

则向量组 α_1，α_2，…，α_m 线性相关，必要而且只要：$\text{rank}A<m$。

证明 为了说明向量组α_1，α_2，…，α_m 线性相关，只须考察是否有不全为0的m个数k_1，k_2，…，k_m 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta \qquad (1)'$$

成立。

为此，将 α_i 的分量代入（1）′式，则得到：

$$k_1(a_{11},\ a_{21},\ \cdots,\ a_{n1})+k_2(a_{12},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{n2})+\cdots$$
$$+k_m(a_{1m},\ a_{2m},\ \cdots,\ a_{nm})$$
$$=(0,0,\cdots,0)$$

整理之，得到：

$$(a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m,\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots$$
$$+a_{2m}k_m,\ \cdots,\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m)$$
$$=(0,0,\cdots,0)$$

由此得到一个齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=0 \end{cases} \qquad (2)'$$

到此可以看出：存在不全为0的m个数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使(1)′成立，必要而且只要齐次线性方程组（2）′有非0解 k_1，$k_2,\cdots,k_m$。

从而，α_1，α_2，…，α_m 线性相关，当且仅当以A为系数阵的齐次线性方程组（2）′有非0解。

但是，（2）′有非0解必要而且只要 $\mathrm{rank}A<m$，所以，α_1，α_2，…，α_m线性相关，必要而且只要

$$\mathrm{rank}A<m.$$

定理3得证。

定理3给出了判断一组向量 α_1，α_2，…，α_m 线性相关或线性无关的一个具体方法，即用每个向量的分量作列组成一个$n\times m$矩阵A，求出矩阵A的秩，则向量组α_1，α_2，…，α_m 的线性相关性即见分晓：若 $\mathrm{rank}A<m$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；若 $\mathrm{rank}A=m$，则 α_1，α_2，…，α_m 线性无关。

定理3的重要意义主要在于，它所揭示的一组向量的线性相关性与分量所组成的矩阵之间的联系。它为讨论向量组的线性相关性的一系列问题，提供了一般方法——矩阵方法。

推论1　一组n维向量：α_1，α_2，…，α_m 如果 $m>n$，则向量组α_1，α_2，…，α_m 必线性相关。

事实上，如果$m>n$，则α_1，α_2，…，α_m 的分量矩阵：$A=(a_{ij})$为 $n\times m$ 矩阵，其秩必小于m：$\mathrm{rank}A<m$。所以，向量组 α_1，α_2，

…，α_m 线性相关。

推论 2　任一含有非零向量的子集 S 必有极大线性无关组；而且 S 的任意一组线性无关向量都能扩充为 S 的一个极大线性无关组。

事实上，首先任取 S 中的一个非零向量，设为 α_1。如果 S 中每一向量都能被 α_1 线性表示，则 α_1 即为 S 的一个极大线性无关组；

其次，如果在 S 中有向量不能被 α_1 线性表示，任取其一，设为 α_2。则

1）α_1，α_2 线性无关；

2）如果 S 中的每一个向量都能被 α_1，α_2 线性表示，则 α_1，α_2，即为 S 的极大线性无关组。

再次，如果在 S 中还有不能被 α_1，α_2 线性表示的向量，任取其一设为 α_3，则

1）α_1，α_2，α_3 必线性无关；

2）如果 S 中每一个向量都能被 α_1，α_2，α_3 线性表示，则 α_1，α_2，α_3 即为 S 的极大线性无关组。

如此继续作下去，因为由推论 1 线性无关的 n 维向量不能多于 n 个，所以上述作法不会无止境地延续下去。从而可以断定，按上述作法，至多得到 n 个线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 时就终止，因此，经过有限个步骤，必能找到 S 的一个极大线性无关组。至于推论 2 的第二部分是显然的。

定理 4　设向量组 α_1，α_2，…，α_m 的分量所组成的矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

则 α_1，α_2，…，α_m 的一部分向量 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r} 是它的极大线性无关组，必要而且只要 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r} 所在的列上有 A 的基础子式。

证明　先证必要性

设

$$\alpha_{i_1}=(a_{1i_1},\ a_{2i_1},\ \cdots,\ a_{ni_1})$$
$$\alpha_{i_2}=(a_{1i_2},\ a_{2i_2},\ \cdots,\ a_{ni_2})$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{i_r}=(a_{1i_r},\ a_{2i_r},\ \cdots,\ a_{ni_r})$$

是 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 的一个极大线性无关组，则由定理3可知：α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots\alpha_{i_r}$的分量所构成的矩阵：

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \cdots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \cdots & a_{2i_r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ni_1} & a_{ni_2} & \cdots & a_{ni_r} \end{pmatrix}$$

的秩等于 r．所以，A_1 有 r 阶子式 $D\neq0$．显然，D在α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r} 所在的 r 个列上．从而，D在A中 α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r}所在的 r 个列上．

下面证明，D为A的一个基础子式，为此，只须证：$\mathrm{rank}A=r$即可．

因为

$$\alpha_{i_1}=(a_{1i_1},\ a_{2i_1},\ \cdots,\ a_{ni_1})$$
$$\alpha_{i_2}=(a_{1i_2},\ a_{2i_2},\ \cdots,\ a_{ni_2})$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{i_r}=(a_{1i_r},\ a_{2i_r},\ \cdots,\ a_{ni_r})$$

是向量组 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 的极大线性无关组，所以每一α_j都能被 α_{i_1}, α_{i_2},$\cdots$, α_{i_r} 线性表示．特别是，α_{i_1}, α_{i_2},$\cdots$, α_{i_r} 以外的每个向量：

$$\alpha_j=(a_{1j},\ a_{2j},\ \cdots,\ a_{nj}),\ j\neq i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r$$

都能被α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r} 线性表示：

$$\alpha_j=k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r} \tag{*}$$

将 α_j, α_{i_1}, α_{i_2}, $\cdots$, α_{i_r} 的分量代入(*)式，整理之，即得

到：

$(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) = (a_{1i_1}k_1 + a_{1i_2}k_2 + \cdots + a_{1i_r}k_r,\ a_{2i_1}k_1 + a_{2i_2}k_2 + \cdots + a_{2i_r}k_r,\ \cdots,\ a_{ni_1}k_1 + a_{ni_2}k_2 + \cdots + a_{ni_r}k_r)$

所以有：

$$\begin{cases} a_{1j} = a_{1i_1}k_1 + a_{1i_2}k_2 + \cdots + a_{1i_r}k_r \\ a_{2j} = a_{2i_1}k_1 + a_{2i_2}k_2 + \cdots + a_{2i_r}k_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nj} = a_{ni_1}k_1 + a_{ni_2}k_2 + \cdots + a_{ni_r}k_r \end{cases} \qquad (*)'$$

于是对A的列作初等变换如下：

把第i_1列，第i_2列，…，第i_r列的$-k_1$倍、$-k_2$倍，…，$-k_r$倍都加到第j列上，则由$(*)'$可知，A经过上述列的初等变换所变成的矩阵B_1的第j列的元素都等于0。

因此，根据上述，可对A的列作初等变换化为矩阵B，使B的第i_1,第i_2，…，第i_r列与A的相同，除此之外的其它列的元素都等于0。

由于在α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}所在的列上有r阶子式$D \neq 0$，所以矩阵B的秩为r。

另一方面，因为 $\text{rank}A = \text{rank}B$，所以矩阵$A$的秩等于$r$。综上所述，可知位于$\alpha_{i_1}$，$\alpha_{i_2}$，…，$\alpha_{i_r}$所在的列上的$r$阶子式$D$为$A$的基础子式。必要性得证。

其次证明充分性。假设在α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}所在的列上有A的基础子式。于是

（1）α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r} 的分量所构成的矩阵的秩等于r，所以 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}线性无关；

（2）对于向量组 α_1，α_2，…，α_m 中任一向量α_j来说，当$j = i_1$，i_2，…，i_r 时，显然有

α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}，α_j 线性相关；

当$j \neq i_1$，i_2，…，i_r时，则因α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}，α_j 的分量矩阵的秩等于r，所以

$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 线性相关。

综上所述可知，对于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中任一向量 α_j，总有：$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}, \alpha_j$ 是线性相关的。

所以，$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的极大线性无关组。充分性得证。

推论 **若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的分量矩阵的秩等于 r 时，则其中任意多于 r 个向量的向量组，必线性相关。**

定理 5 **S 的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等。**

证明 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 是 S 的任意两个极大线性无关组。把这两个极大线性无关组放在一起，作为一个向量组来考虑：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \tag{3}$$

写出向量组（3）的分量所组成的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt} \end{pmatrix}$$

其中，$\alpha_i=(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$，$\beta_j=(b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj})$ $i=1,2,\cdots,r$；$j=1,2,\cdots,t$。

显然，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 也都是向量组（3）的极大线性无关组。所以，由定理 4 在它们各自所在的列上分别都有 A 的基础子式 D_1 和 D_2。其中 D_1 应为 r 阶子式，而 D_2 则应为 t 阶子式。

但是，同一个矩阵的基础子式的阶数必须相等，所以 $r=t$。证完。

定义 5 **n 维向量集合 S 的极大线性无关组中所含向量的个数 r，叫做向量组 S 的秩。**

若 S 只含零向量时，规定 S 的秩为 0 。

命题 3 **向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 的秩等于 r 必要而且只要，**

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ **的分量所组成的矩阵的秩等于 r.**

由秩的定义和定理 4，上面的命题是显然的。

定理 6　如果向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$（Ⅰ）能被向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（Ⅱ）线性表示，则向量组（Ⅰ）的秩≤向量组（Ⅱ）的秩。

证明　把两个向量组合到一起来考虑，则向量组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \qquad (\text{Ⅲ})$$

的秩等于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩。

这是因为，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组：$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 能线性表示（Ⅲ）的每个向量。

而$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 中的极大线性无关组　$\beta_{i_1}, \cdots, \beta_{i_k}$是（Ⅲ）的线性无关向量组，故其所含向量个数 k 必不能大于 r 。即（Ⅰ）的秩≤（Ⅱ）的秩。

推论　等价向量组的秩相等。

上述定理 3、4、5 完全解决了向量空间V的任一子集S的极大线性无关组的存在性、含有向量的个数以及求出极大线性无关组的方法。

定义 6　向量空间V的极大线性无关组叫做V的基底，基底中所含向量的个数 m 叫做V的维数，记作：$dimV = m$，维数为m的向量空间叫做 m维向量空间．零向量所构成的向量空间，规定其维数为 0 .

显然，$F^{(n)}$ 是n维向量空间，向量组：

$$\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0)$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,\cdots,0)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_n = (0,0,\cdots,1)$$

是$F^{(n)}$的一个基底。

在上面讨论中知道，已知齐次线性方程组的所有解组成一向量空间，叫做解空间．当该齐次线性方程组有非 0 解时（即其秩 $r<n$），则其解空间一定存在基底，我们称它为该齐次线性方程组的**基础解**

系。

到此，线性方程组理论的第二方面的问题——解之间的关系以及由此导出的解的结构问题得到彻底解决。即，

任一齐次线性方程组的每一解，都可表为基础解系中这有限个向量 α_1，α_2，…，α_t 的线性组合：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$，其中的 t 是由线性方程组本身所决定的一个数。

另一方面，由 §3 定理知，任一非齐次线性方程组的通解可表为：$\gamma_0+\alpha$，α 为其导出齐次线性方程组的解，γ_0 为该线性方程组的一个固定解。因此，进一步可得到：非齐次线性方程的通解可表为：

$\gamma_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$， 其中 α_1，α_2，…，α_t 为此非齐次线性方程组的导出齐次组的基础解系。

下面进一步给出齐次线性方程组的解空间的维数和基础解系的求法。

定理7 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{4}$$

的系数阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

的秩等于 r。

则齐次线性方程组（4）的解空间的维数为 $n-r$。

证明 若 $\operatorname{rank}A=r=n$ 时，则（4）只有唯一的零解，从而（4）的解空间的维数等于0。但是，$n-r=n-n=0$，故当 $r=n$ 时定理成立。

若 $\text{rank}A=r<n$ 时，下面应用分离系数法解齐次方程组（4）。

为简明起见，设 A 经过行的初等变换所化简的 B 型阵为下面的特殊形式：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & & c_{1\,r+1} & \cdots & c_{1\,n} \\ & 1 & & & c_{2\,r+1} & \cdots & c_{2\,n} \\ & & \ddots & 1 & c_{r\,r+1} & \cdots & c_{r\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

则齐次方程组（4）与以 B 为系数阵的齐次方程组：

$$\begin{cases} x_1 \quad + c_{1\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1\,n}x_n = 0 \\ \quad x_2 \quad + c_{2\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2\,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad x_r + c_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r\,n}x_n = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 0x_n = 0 \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad 0x_n = 0 \end{cases}$$

同解。所以，（4）的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1\,r+1}t_1 - \cdots - c_{1\,n}t_{n-r} \\ x_2 = -c_{2\,r+1}t_1 - \cdots - c_{2\,n}t_{n-r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -c_{r\,r+1}t_1 - \cdots - c_{r\,n}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases} \tag{4$'$}$$

应用通解公式找出（4）的 $n-r$ 个解如下：

在（4）$'$，中，令 t_1，t_2，$\cdots$，t_{n-r} 分别取下列 $n-r$ 组值：

$t_1=1$，$t_2=0$，$\cdots$，$t_{n-r}=0$

$t_1=0$，$t_2=1$，$\cdots$，$t_{n-r}=0$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_1=0,\ t_2=0,\ \cdots,\ t_{n-r}=1$$

则得到（4）的 $n-r$ 个解：

$$\alpha_1=(-c_{1\,r+1},\ -c_{2\,r+1},\ \cdots,\ -c_{r\,r+1},\ 1, 0, \cdots, 0)$$

$$\alpha_2=(-c_{1\,r+2},\ -c_{2\,r+2},\ \cdots,\ -c_{r\,r+2},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-r}=(-c_{1n},\ -c_{2n},\ \cdots,\ -c_{rn},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

下面证明：α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 为（4）的基础解系。

（1）显然 α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 的分量矩阵的秩等于 $n-r$，所以 α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 线性无关；

（2）其次证明，对于（4）的任一解：

$$\beta=(-c_{1\,r+1}t_1-c_{1\,r+2}t_2-\cdots-c_{1n}t_{n-r},\ \ -c_{2\,r+1}t_1-c_{2\,r+2}t_2-\cdots-c_{2n}t_{n-r},\cdots,-c_{r\,r+1}t_1-c_{r\,r+2}t_2-\cdots-c_{rn}t_{n-r},t_1,\ t_2,\cdots,\ t_{n-r})\ .$$

α_1，α_2，$\cdots$，α_r，β 线性相关。

因为，

$$\beta=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{n-r}\alpha_{n-r}$$

所以，α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r}，β 线性相关。

综合上述，α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 为（4）的基础解系，从而得到：（4）的解空间的维数等于 $n-r$。定理证完。

上述定理 7 不但解决了齐次线性方程组的解空间的维数问题，而且它的具体证明过程就是具体求出基础解系的方法。

由 §3 的定理进一步有

定理 8　设线性方程组

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. \tag{5}$$

的秩等于 r，则（5）的通解可表为：

$$\gamma_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}, \qquad (5)'$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{r-r}$ 为数域 F 中任意数；γ_0 为（5）的任意一个固定解，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$ 为（5）的导出齐次组的基础解系。

定理 8 表明，求一般线性方程组的通解，可分为两个步骤：先求得一个解 γ_0，然后再去求导出齐次组的一个基础解系。但是这两个步骤在具体作的时候，可以结合起来进行。这一点从下面的例题中即可看出。

例15　求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases} \qquad (6)$$

的通解，并表成(5)′的形式。

解　这个线性方程组我们已经解过，现在用它来说明求线性方程组的通解（(5)′形的）的主要步骤。

1）用分离系数法求出通解表达式；

2）求出（6）的一个固定解 γ_0；

3）求出（6）的导出齐次组的一个基础解系。

先作第一步。写出方程组（6）的表示矩阵，然后对行作初等变换，把系数阵相应的部分化简为 B 型阵。

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-3),P_{31}(-2),P_{41}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1),P_{42}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{B}$$

以$\overline{B}$为表示矩阵的线性方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\qquad + 2x_4 = 0 \\ \quad -5x_2 + x_3 \quad + 5x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad 0x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0x_4 = 0 \end{cases} \qquad (6)'$$

于是(6)′的，即（6）的通解公式为：

$$\begin{cases} x_1 = t_2 - 2t_4 \\ x_3 = 5t_2 - 5t_4 - 1 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \end{cases} \qquad (7)$$

其次，求出（6）的一个固定解。在（7）中令

$t_2 = 0$，$t_4 = 0$ 得到

$x_1 = 0$，$x_2 = 0$，$x_3 = -1$，$x_4 = 0$

即$\gamma_0 = (0, 0, -1, 0)$为(6)的一个固定解。

最后求出（6）的导出齐次组的一个基础解系。

由于（6）的导出齐次组的系数阵即为对应它的非齐次线性方程组的系数阵，所以把（6）的通解公式中的常数项都用0替换，即得到（6）的导出齐次组的通解公式。

因为系数阵的秩等于2，所以（6）的导出齐次组的基础解系含两个向量。求之如下。

在 $\begin{cases} x_1 = t_2 - 2t_4 \\ x_3 = 5t_2 - 5t_4 \\ x_2 = t_2 \\ x_4 = t_4 \end{cases}$

中分别令：$t_2 = 1$，$t_4 = 0$；$t_2 = 0$，$t_4 = 1$，则得（6）的导出齐次组的基础解系：

$$\alpha_1 = (1,1,5,0), \quad \alpha_2 = (-2,0,-5,1)$$

因此，（6）的通解为：

$$\gamma_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = (0,0,-1,0) + k_1(1,1,5,0) + k_2(-2,0,-5,1)$$

其中，k_1，k_2 为数域 F 中任意数。

练　习　四

1．试求下式中的向量 α：

（1）$\alpha = -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$

（2）$3(\alpha_1 - \alpha) + 2(\alpha_2 + \alpha) = 5(\alpha_3 + \alpha)$

其中，$\alpha_1 = (2,5,1,3)$，$\alpha_2 = (10,1,5,10)$，$\alpha_3 = (4,1,-1,1)$

2．判断向量 β 能否被 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表示，如果能，求其表示系数：

（1）$\beta = (1,2,1,1)$，$\alpha_1 = (1,1,1,1)$，$\alpha_2 = (1,1,-1,-1)$，$\alpha_3 = (1,-1,1,-1)$，$\alpha_4 = (1,-1,-1,1)$。

（2）$\beta = (0,0,0,1)$，$\alpha_1 = (1,1,0,1)$，$\alpha_2 = (2,1,3,1)$，$\alpha_3 = (1,1,0,0)$，$\alpha_4 = (0,1,-1,-1)$。

3．判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\alpha_1 = (1,1,1)$，$\alpha_2 = (1,2,3)$，$\alpha_3 = (1,3,6)$

（2）$\alpha_1 = (1,-1,2,4)$，$\alpha_2 = (0,3,1,2)$，$\alpha_3 = (3,0,7,4)$，$\alpha_4 = (1,-1,2,0)$

4．设向量组 α_1，α_2，…，α_m。（1）如果存在 m 个全为 0 的

数k_1，k_2，…，k_m 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\theta$$

成立，问 α_1，α_2，…，α_m 是否线性无关？

（2）如果任何一组不全为0的数 k_1，k_2，…，k_m 使得，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq\theta$，问$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_m$ 是否线性无关？

5．设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1$，$\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是两个n维向量组．如果

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_m\beta_m=\theta$$

必须$k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_m=0$，试问α_1，α_2，…α_m，$\beta_1,\beta_2,\cdots$，β_m是否一定线性无关？如果不一定试举出一反例说明之．

6．判断下列命题真伪性：

（1）若α_1，α_2，…，α_s 线性无关，β_1，β_2，…，β_t 也线性无关时，则α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_t也线性无关．

（2）若α_1，α_2，…，α_s与β_1，β_2，…，β_t 都线性相关时，则α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_t 也线性相关．

7．如果一个向量组线性相关，是否每一向量都可被其余向量线性表示，为什么？

8．若向量组：

$$\alpha_1=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1k})$$
$$\alpha_2=(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2k})$$
$$\vdots$$
$$\alpha_r=(a_{r1},a_{r2},\ \cdots,\ a_{rk})$$

线性无关，则向量组：

$$\bar{\alpha}_1=(a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1k},\ a_{1k+1},\ \cdots,\ a_{1n})$$
$$\bar{\alpha}_2=(a_{21},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{2k},\ a_{2k+1},\ \cdots,\ a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$\bar{\alpha}_r=(a_{r1},\ a_{r2},\ \cdots,\ a_{rk},\ a_{rk+1},\ \cdots,\ a_{rn})$$

也线性无关．若α_1，α_2，…，α_r 线性相关，是否$\bar{\alpha}_1$，$\bar{\alpha}_2$，…，$\bar{\alpha}_r$ 也线性相关？

9．设向量组：$\alpha_1=(1,-1,2,4)$，$\alpha_2=(0,3,1,2)$，

$\alpha_3=(0,0,1,2)$，$\alpha_4=(1,2,3,6)$，$\alpha_5=(0,3,2,4)$

试求 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的一个极大线性无关组。

10．设向量组：α_1，α_2，…，α_m；β_1，β_2，…，β_m 以及 $\delta_1=\alpha_1-\beta_1$，$\delta_2=\alpha_2-\beta_2$，…，$\delta_m=\alpha_m-\beta_m$ 的秩分别为 r_1，r_2 和 r_3。

证明：（1）$r_1\leqslant r_2+r_3$；（2）$r_2\leqslant r_1+r_3$；（3）$r_3\leqslant r_1+r_2$。

11．设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

证明：$\operatorname{rank}C\leqslant\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B$。

12．求下列齐次线性方程组的基础解系。

（1）$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0\\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0\\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0\end{cases}$$

（2）$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0\\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0\\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0\end{cases}$$

13．设 α_1，α_2，α_3 是某一齐次线性方程组的基础解系，试问，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 是否也是该齐次线性方程组的基础解系。

14．求下列方程组的通解（用解向量的结构形式表达）。

（1）$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12 \end{cases}$

习 题 六

1. 设向量组：

$$\begin{cases} \alpha_1=(a_{11}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{1j}, \cdots, a_{1n}) \\ \alpha_2=(a_{21}, \cdots, a_{2i}, \cdots, a_{2j}, \cdots, a_{2n}) \\ \quad\vdots \\ \alpha_s=(a_{s1}, \cdots, a_{si}, \cdots, a_{sj}, \cdots, a_{sn}) \end{cases} \qquad (\text{I})$$

若同时交换上述向量组的第 i 个和第 j 个分量，得到向量组

$$\begin{cases} \alpha_1'=(a_{11}, \cdots, a_{1j}, \cdots, a_{1i}, \cdots, a_{1n}) \\ \alpha_2'=(a_{21}, \cdots, a_{2j}, \cdots, a_{2i}, \cdots, a_{2n}) \\ \quad\vdots \\ \alpha_s'=(a_{s1}, \cdots, a_{sj}, \cdots, a_{si}, \cdots, a_{sn}) \end{cases} \qquad (\text{II})$$

证明：向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的线性相关性一致．即，α_1，α_2，…，α_s 线性相关当且仅当 α_1'，α_2'，…，α'_s 线性相关．

2. 设 α_1，α_2，…，$\alpha_s(s\geqslant 2)$ 线性无关，作线性组合：

$$\beta_1=\alpha_1+k_1\alpha_s,\ \beta_2=\alpha_2+k_2\alpha_s,\ \cdots,\ \beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+k_{s-1}\alpha_s.$$

证明：β_1，β_2，…，β_{s-1} 线性无关．

3. 若向量组：α_1，α_2，…，$\alpha_s(\alpha_1\neq\theta)$中，每个向量$\alpha_i$ 都不能被其前 $i-1$ 个向量α_1，…，α_{i-1} 线性表示，则 α_1，α_2，…，α_s 线性无关．

4. 设向量组 β_1，β_2，…，β_s 可被向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性表示：

$$\beta_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{is}\alpha_s \quad i=1,2,\cdots,s$$

若行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

则 α_1，α_2，…，α_s 也能被向量组β_1，β_2，…，β_s 线性表示。

5．设向量组α_1，α_2，…，α_s 线性无关，并可被向量组β_1，β_2，…，β_s 线性表示，则 β_1，β_2，…，β_s 也必线性无关。

6．设向量组 α_1，α_2，…，α_s 的秩为 r，在其中任取 m 个向量：α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_m}($m\leqslant s$)，证明此向量组的秩$\geqslant r+m-s$。

7．设向量组α_1，α_2，…，α_s（Ⅰ）与向量组β_1，β_2，…，β_s（Ⅱ）满足条件：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta$ 成立，必要而且只要 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=\theta$ 成立。

证明：

（1）向量组（Ⅰ）中任一部分向量组 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}线性相关，必要而且只要向量组（Ⅱ）中的部分向量组：β_{i_1}，β_{i_2}，…，β_{i_r} 线性相关；

（2）向量组（Ⅰ）中任一向量 $\alpha_t=k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}$，必要而且只要（Ⅱ）中的向量$\beta_t=k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}$。

8．设 α_1，…，α_r($r<n$)是 $F^{(n)}$ 中 r 个线性无关向量．证明：在 $F^{(n)}$ 中存在 $n-r$ 个向量α_{r+1}，…，α_n 使得：

（1）α_1，…，α_r，α_{r+1}，…，α_n 线性无关；

（2）$F^{(n)}$中每个向量都能被 α_1，…，α_r，α_{r+1}，…，α_n 线性表示。

9．若 α_1，α_2，…，α_n 线性无关，其中

$\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, n$

证明：存在 n 个数：k_1，k_2，…，k_n 使得：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(c,0,\cdots,0)$，$c\neq0$。

10．设 γ_0 为非齐次线性方程组的一个解，ξ_1，ξ_2，…，ξ_{n-r}是

它的导出齐次组的基础解系．证明：

（1）γ_0，$\gamma_0+\xi_1=\gamma_1$，…，$\gamma_{n-r}=\gamma_0+\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）此非齐次线性方程组的任一解 γ 可表为：$\gamma=k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}$，其中，

$$k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1.$$

11．设非齐次线性方程组（Ⅰ）和（Ⅱ）的导出齐次组分别是（Ⅰ′）和（Ⅱ′）。

（1）若（Ⅰ）有解，而（Ⅰ）与（Ⅱ）同解．证明：（Ⅰ′）与（Ⅱ′）也同解；

（2）若不假定（Ⅰ）有解，由（Ⅰ）与（Ⅱ）同解是否能推出（Ⅰ′）与（Ⅱ′）同解？

（3）由（Ⅰ′）与（Ⅱ′）同解是否能推出（Ⅰ）与（Ⅱ）同解？

12．证明：线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

有解的充分必要条件是：齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0 \end{cases} \tag{2}$$

的每个解 $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$满足条件：

$$c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_mb_m=0.$$

13．设线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=d_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=d_2 \\ \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=d_m \end{cases} \tag{1}$$

的秩为 r_1，而线性方程组：

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1s}x_s = c_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2s}x_s = c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{ms}x_s = c_m \end{cases} \qquad (2)$$

无解，其系数阵$B=(b_{ij})$的秩为 r_2。证明：

$$G=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} & d_1 & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} & d_2 & c_2 \\ \cdots & & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} & d_m & c_m \end{pmatrix}$$

的秩 $\leqslant r_1+r_2+1$。

14. 解下列线性方程组

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=5 \\ 2x_1+4x_2 \qquad -x_4=1 \\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=4 \\ x_1-2x_2-9x_3-5x_4=-13 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} 4x_1+x_2-2x_3-x_4=3 \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+5x_2 \qquad -x_4=-1 \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 9x_1-x_2+14x_3+2x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=1 \\ 4x_1+5x_2+7x_3-10x_4=2 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=7 \\ x_1-3x_2+2x_3-4x_4=-2 \\ 5x_1-4x_2+3x_3-6x_4=3 \end{cases}$

(5) $$\begin{cases} \qquad\quad x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=1 \\ x_1 \qquad\ +x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n=2 \\ x_1+x_2 \quad +x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=3 \\ \quad\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \\ x_1+x_2+ \quad \cdots \quad +x_{n-1} \qquad =n \end{cases}$$

学　习　指　导

第一章　数的基础知识

【内容提要】

一　内容概述

本章讨论了三个问题：数学归纳法，整数的整除性，数域。

以自然数集的归纳原理为根据引出了数学归纳法．这是数学中常用的有力的数学证明方法．从除法不能问题导出了整数的整除概念及其基本性质，这给第二章讨论多项式的整除问题提供了一个模式．能够进行某种运算是一个数集的重要特性，我们把能够进行四则运算的数集叫做数域．以下常用的是 Q，D，C 三个数域．

二　内容要点

本章提出的主要概念有

集合，子集；整除与约数，最大公约数；互质；质数，合数；数域．

主要结论有

自然数集的归纳原理；a，b 与其大公约之间的等式关系：存在 u，$v\in Z$ 使 $(a,b)=au+bv$；大公约的等价性质；因数分解定理．

主要方法有

数学归纳法；辗转相除法．

三　基本要求

要求读者理解和掌握上面提到的主要概念，主要结论和主要方法。

【内容分析】

§1　自然数与数学归纳法

关于自然数与数学归纳法可以有各种不同的讲法。这里我们的讲法可以说是彻底地从简讲法。它的特点是把人们在长期实践中得到的对自然数集规律性的认识做为最简单不过的自明的事实——归纳原理，承认下来，而不企图用另外与之等价的事实为基础，来证明归纳原理，这一点是读者应当明确的。此外常见的讲法是把最小数原理：自然数集的任一不空子集M都有最小数，做为可证明的结论予以证明。在已证明的最小数原理的基础上给出归纳原理的证明。这样讲法的特点是理论严谨推理性强。

读者应当注意到，第一归纳原理、第二归纳原理和上面提到的最小数原理三者是等价的命题，即承认当中一个可以推出其它两个。另外，还有所谓的有限性原理：对每一个自然数m，$\leqslant m$的自然数恰好有m个。事实上这个命题与前述三个命题也是等价的。面最小数原理通常就是在这个有限性原理的基础上证明的。

数学归纳法由两个环节组成，即递推起点和递推过程。用数学归纳法证明问题时二者缺一不可，就是说每一个环节都必须切实的得到验证，否则将得不出“命题对$\geqslant k$的一切自然数都成立”的结论。例如，假设

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2+1$$

对 $n=k$ 成立，那么我们可以推出 $n=k+1$ 时上式也成立。事实上

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\&=[1+3+5+\cdots\cdots+(2k-1)]+(2k+1)\\&=k^2+1+2k+1\\&=(k+1)^2+1.\end{aligned}$$

有了这个似乎真实的递推过程，我们并不能得出上述等式对一切自然数都成立的结论。因为我们已经证明了，前 n 个奇数的和等于 n^2 而不等于 n^2+1。这是为什么呢？因为这个似乎真实的递推过程根本没有任何一个"落脚点"，即对任何一个自然数 k，上述的等式都不成立。这无异于说上述递推过程只不过是个虚假的现象。因为出发点就不是真的。所以用数学归纳法做证明时不切实验证第一个环节不行，即没有一个递推起点是不行的。

再如，考虑等式 $(n^2-5n+5)^2=1$。

当 $n=1$ 时，$(1^2-5\cdot1+5)^2=1$；

当 $n=2$ 时，$(2^2-5\cdot2+5)^2=1$；

当 $n=3$ 时，$(3^2-5\cdot3+5)^2=1$。

由此得出上述等式对一切自然数 n 都成立。这个结论是靠不住的，其实是错误的。因为这里没有一个科学的递推过程，结论只能是该等式对 1，2，3 三个自然数成立。实际上当 $n=5$ 时就有

$$(5^2-5.5+5)^2=25\neq1.$$

所以用数学归纳法做证明时不切实验证第二个环节也不行，即没有递推过程也是不行的。

§ 2 整数的整除性

本节里，整除是个基本的概念，由它诱导出约数、公约数、最大公约数这样一组概念。与此相应的，我们首先指出了整除的若干简单性质，带余除法定理和辗转相除法定理。这主要是解决了求大公约的方法问题。在此基础上，我们进而证明了关于大公约的两条

重要结论：大公约的表示定理，即定理 3；大公约的等价性质，即定理 4．前者把 a，b 与其大公约用等式直接地联结起来，这个等式关系在大公约的讨论中起着重要的作用．后者更加贴切地揭示出大公约概念的实质，即大公约大在何处，要求读者对这两个定理要熟练掌握和加深理解．

下面再补充说明几点．

首先，若$a\backslash b$又$b\backslash a$，我们就说 a 与 b 相抵（相伴、相通）．整除的性质 1）与 2）表明，相抵的两个整数有相同的约数也有相同的倍数．因此在整除问题的讨论中二者起着相同的作用．而 a 与 b 相抵当且仅当二者的绝对值相等．这样，在整除理论中绝对值相同的整数起着相同的作用，可以不加区别．因此只对非负整数讨论整除问题就足够了．进而，非负整数当中的 0，由性质 5，它是任何整数的倍数，除了它本身以外不是任何整数的约数．这表明对整除问题来说，0 这个数极其平凡，故而可以略去不计，因此整除问题完全可以局限在自然数集的范围内来讨论．

其次，定义大公约时明确限制 a 与 b 不全为 0．这为什么？原因很简单，因为按照大公约的定义，当 $a=0$，$b=0$ 时，每一个整数都是 a 与 b 的公约数，从而在公约数中没有最大的，所以两个都是 0 的整数最大公约数不存在．因此在规定大公约的概念时，一开始就不考虑两个数都是 0 的情形．但是前边提到的大公约的等价性质使我们对大公约的概念有了更加贴切的理解．依据这种理解来规定大公约的概念时，对于两个都是 0 的整数也不例外，同样也有大公约，其实0就是，即$(0,0)=0$．

最后，$0\backslash 0$ 有意义但$\frac{0}{0}$不许写．为什么？我们知道，前者是整除的意思，后者是除法的符号．整除，在定义时对任二整数 a 与 b 同样看待，对当中的每一个都没有限制；而考虑除法时，则必须限制除数 $b\neq 0$，换句话说，考虑除法问题时一开始就去掉除数等于 0 的情形．道理何在呢？可以这样看，所谓可以进行除法必要而且只要对于任意两个数 a 与 b，以 b 除 a 都有唯一的商 q，使 $a=$

bq，可是这在以 0 做除数时是根本办不到的。例如当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，不存在 q 使 $a=bq$，所以 b 除 a 不存在商；而当 $a=0$，$b=0$ 时，使 $a=bq$ 成立的 q 不只一个，即 b 除 a 的商不是唯一的。这样对于根本办不到的事情只好放弃要求，在讨论除法问题时不让 0 做除数。

§ 3　因数分解定理

本节只讲了因数分解定理一个问题。其中质数是个基本概念。此外定理的证明方法倒是可以强调的，这在正文中已有所阐明这里就不再赘述了。

下面补充说明一个问题，我们曾经指出过这样的看法，由于绝对值相同的整数有相同的约数也有相同的倍数，因此在讨论与约数有关的问题时可以只局限在非负整数范围内来进行。然而在规定质数、合数的概念时只对＞1 的整数做了定义，却把 0 与 1 这两个非负整数排除在外。诚然，大家早已知道 1 既不算是质数也不是合数，0 也如此。对此我们试做以下分析。

首先，按正文中关于质数、合数的定义性质来看一下 1 与 0 这两个数。

显而易见，1 只有 1 与其本身是它的约数，而 0 除 1 与其本身之外确有其它的约数，因为任何整数都是 0 的约数。这样，按理似乎应当承认 1 是质数，0 是合数。

其次，如果我们承认 0 是合数，那么显然这个合数 0 不能分解成质数之积的形式。于是由于多了这样一个合数，因数分解定理的前一部分，分解的可能性被破坏了。如果承认 1 是质数，那么每一个整数的分解式都不再是唯一的，这样因数分解定理的后一部分，分解的唯一性就不成立了。这样一来，把一个本来颇为完整的统一的正确命题被 0，1 这两个极其平凡的整数的参予给完全破坏了，这自然是毫无必要的。因此，在因数分解问题中，在一开始定义质

数、合数时就理所当然的把 0 与 1 排除在外，即只对 >1 的整数给出质数，合数的定义.

【例题选解】

例 1　不等式 $2^n>n^3$ 对哪些自然数 n 成立？

解　我们首先考察 n 取前几个自然数的情形.

$n=1$ 时，$2^1>1^3$；

$n=2$ 时，$2^2<2^3$；

$n=3$ 时，$2^3<3^3$；

$n=4$ 时，$2^4<4^3$；

$n=5$ 时，$2^5<5^3$；

$n=6$ 时，$2^6<6^3$；

$n=7$ 时，$2^7<7^3$；

$n=8$ 时，$2^8<8^3$；

$n=9$ 时，$2^9<9^3$；

$n=10$ 时，$2^{10}>10^3$；

$n=11$ 时，$2^{11}>11^3$.

通过以上计算我们看到，不等式 $2^n>n^3$ 当 $n=1$ 时成立，当 $n=2, 3, \cdots\cdots, 9$ 时不成立，而当 $n=10, 11$ 时成立. 下面我们证明，对于 $\geqslant 10$ 的一切自然数 n，$2^n>n^3$ 都成立.

1）已知 $n=10$ 时不等式成立.

2）假设对 $k\geqslant 10$，不等式 $2^k>k^3$ 成立. 看 $k+1$ 的情形：

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^3=k^3+k^3=k^3+kk^2$$

$\because$　$k\geqslant 10$　　$\therefore$　$kk^2>3k^2+3k+1$.

于是

$$k^3+kk^2>k^3+3k^2+3k+1=(k+1)^3.$$

因此　$2^{k+1}>(k+1)^3$.

总之当且仅当 $n=1$ 和 $n\geqslant 10$ 时，$2^n>n^3$ 成立.

例 2　如果 $(a, b_1)=d_1$，$(a, b_2)=d_2$ 且 $(b_1, b_2)=1$，那么 $(a, b_1b_2)=d_1d_2$。

解　首先指出 d_1d_2 是 a 与b_1b_2 的公约数，显然 $d_1d_2\backslash b_1b_2$，又由 $d_1\backslash a$，$d_2\backslash a$ 及$(b_1, b_2)=1$ 也有 $(d_1, d_2)=1$，所以 $d_1d_2\backslash a$，即 d_1d_2是 a 与 b_1b_2 的公约数。

其次，由$(a, b_1)=d_1$，$(a, b_2)=d_2$ 可得

$$au'+b_1v'=d_1,\ au''+b_2v''=d_2$$

于是使以上二式两端分别相乘，则有

$$a(au'u''+b_1v'u''+b_2u'v'')+b_1b_2v'v''=d_1d_2.$$

这就表明 a 与 b_1b_2 的公约数 d_1d_2 是 a 与 b_1b_2 的最大公约数，即 $(a, b_1b_2)=d_1d_2$。

例 3　证明：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$和$\sqrt{\frac{3}{2}}$都不是有理数，即不能写成分数的形式。

证　先证$\sqrt{2}$不是有理数，即它不能写成分数的形式。用反证法，假设$\sqrt{2}$是有理数，于是

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}，其中(a, b)=1.$$

把上式两端平方并整理之，即得

$$2b^2=a^2.$$

由此可见$2\backslash a^2$，又因 2 是质数．所以$2\backslash a$，令 $a=2a_1$，则 $a^2=4a_1^2$。从而

$$2b^2=4a_1^2,\ b^2=2a_1^2.$$

同样的道理，由此可得 $2\backslash b$,这样，2 是 a 与 b 的公约数．但 a 与 b 互质，这个矛盾否定了$\sqrt{2}$是有理数．

同理可证$\sqrt{3}$不是有理数．下面证明$\sqrt{6}$不是有理数．假设$\sqrt{6}$是有理数，于是

$$\sqrt{6}=\frac{a}{b}，其中(a, b)=1.$$

把上式两端平方并整理之，即得

$$6b^2 = a^2$$

由此可见$2\backslash a^2$，又因 2 是质数，所以$2\backslash a$．令 $a=2a_1$，则 $a^2=4a_1^2$。从而

$$6b^2=4a_1^2,\ 3b^2=2a_1^2.$$

由此可见$2\backslash 3b^2$。又因 2 与 3 互质，所以$2\backslash b^2$，$2\backslash b$．这就导至与a，b 互质相矛盾，因而$\sqrt{6}$不是有理数．同理可证$\sqrt{\frac{3}{2}}$不是有理数。

例 4　已知

$$F_1=\{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\in Q\}\text{与}F_2=\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in Q\}$$

都是数域．试证：$F_1\neq F_2$。

证　用反证法，假设 $F_1=F_2$，这样$\sqrt{3}\in F_1$，于是存在有理数 a，b 使

$$\sqrt{3}=a+b\sqrt{2},$$

把上式两端平方并整理之，即得

$$ab\sqrt{2}=\frac{1}{2}(3-a^2-2b^2)$$

这里必有 $ab\neq 0$，即 a 与 b 都不等于 0，不然将导出$\sqrt{3}$或$\sqrt{\frac{3}{2}}$是有理数，这是不可能的．这样由 $ab\neq 0$，则有

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2ab}(3-a^2-2b^2)$$

即$\sqrt{2}$是有理数，这也是不可能的。因此$\sqrt{3}\,\bar{\in}\, F_1$，从而$F_1\neq F_2$。

第二章　一元多项式

【内容提要】

一　内容概述

本章在中学代数关于一元多项式乘、除法的基础上，系统的研究了一元多项式的整除理论，根的存在及求根方面的理论。

二　内容要点

本章介绍的基本概念有：

多项式的整除、最大公因式、多项式的互质、不可约多项式、多项式的标准分解式、多项式的根。

给出的基本结论是

1．带余除法定理，
2．辗转相除法定理，
3．因式分解唯一性定理，
4．代数基本定理，
5．根的个数定理，
6．韦达公式．

给出的基本方法有

1．带余除法，

2. 综合除法，

3. 辗转相除法，

4. 分离重因式法，

5. 施图姆的实根圈定法，

6. 关于整系数多项式在有理数域上不可约的艾森斯坦因判断法，

7. 求整系数多项式有理根的方法，

8. 把有理分式表成部分分式的待定系数法。

三　基本要求

本章仅要求读者掌握上述的三个基本方面。

【内容分析】

§1　一元多项式的定义及运算

本节在介绍了多项式以及多项式系数、次数和多项式的相等诸概念之后，给出了多项式加法，乘法运算及其运算性质。

学习本节内容要注意零多项式与零次多项式这两个概念的区别：

1. 系数全是零的多项式称为零多项式．也就是常数0叫零多项式．零多项式没有次数。

2. 零次多项式是指不等于0的常数．因为$x^0=1$．所以，对于非零常数a，有$a=ax^0$。即非零常数a的次数为0．故称为零次多项式。

§ 2　多项式的整除性

——因式、公因式、最大公因式

关于多项式的整除理论，本节只给出整除定义及性质。如何利用定义及性质判断一个多项式能否整除另一个多项式呢？我们看下面的

例 1　判断下面的多项式能否被$(x-1)^2$整除。

（1）x^3-3x^2+3x-1

（2）$x-1$

（3）x^3

解　（1）由 $(x-1)^2(x-1)=x^3-3x^2+3x-1$，再根据整除定义。故$(x-1)^2$能整除 x^3-3x^2+3x+1。

（2）因为$(x-1)^2=x^2-2x+1$是二次多项式，而 $x-1$ 是一次多项式，任何多项式与二次多项式之积都不等于一次多项式。故$(x-1)^2$不能整除 $x-1$。

（3）因为$(x-1)^2=x^2-2x+1$是二次三项式，而 x^3 是单项式，任何多项式与二次三项式之积都不等于单项式。故$(x-1)^2$不能整除 x^3。

由此，我们不难得出一般性结论：当被除式的次数低于除式的次数，则不能整除；被除式是单项式，除式是多项式（项数>1），则不能整除。

最大公因式在多项式的整除理论中占有相当重要的地位。我们知道：任意两个整数存在最大公约数，那么，任意两个多项式是否也存在最大公因式呢？下节定理 2 给出了肯定回答。而本节命题就是为证明该定理做准备的。它是下节利用辗转相除法求最大公因式的基础。

由最大公因式的定义，我们可以指出：若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不全为 0，那么，它们的最大公因式 $d(x)$一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$的一切

公因式中次数最高的。

事实上，设 $u(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一个公因式。由最大公因式定义知：$u(x) \mid d(x)$ 。再由前面得出的一般性结论知，$u(x)$的次数不大于 $d(x)$ 的次数。故 $d(x)$ 是 $f(x)$与 $g^{(x)}(\neq 0)$的一切公因式中次数最高的。

§ 3　带余除法　辗转相除法

本节定理 1 告诉我们对任二多项式 $f(x)$，$g(x)(\neq 0)$都存在唯一的$q(x)$ 、$r(x)$使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$。其存在性的证明过程是不断的利用一步步消去首项的方法找到商式$q(x)$和余式$r(x)$。

定理 2 指出了任意两个多项式的最大公因式是存在的，而且在不计常数因子时，最大公因式是唯一的。在定理 2 的证明中给出了用辗转相除法（即反复做带余除法）求多项式的最大公因式的方法。

关于多个多项式的最大公因式，讲义中提到：若$d_0(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_{s-1}(x))$ 。那么，$(d_0(x),f_s(x))=d(x)$就是$f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_s(x)$的最大公因式。

事实上　显然 $d(x)$ 是$f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_s(x)$的公因式。因此，只须证明：$f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_s(x)$的任意公因式$u(x)$整除 $d(x)$。因为$u(x)$是$f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_{s-1}(x)$ 的公因式。所以，$u(x)\mid d_0(x)$，又$u(x)\mid f_s(x)$。故$u(x)\mid d(x)$。即 $d(x)$ 是 $f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_s(x)$ 的最大公因式得证。

这样，$f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_s(x)$的最大公因式可以累次应用辗转相除法求出。

§ 4　多项式的因式分解

本节在给出不可约多项式定义，性质后证明了这一章主要定理——因式分解唯一性定理．该定理首先用第二数学归纳法证明了分解式的存在性．即把一个多项式分解为不可约多项式之积的可能性．接着又用数学归纳法证明了分解的唯一性．即在不计常数因子及因子的排列顺序的情况下分解式是唯一的．多项式的因式分解问题是多项式理论的重要组成部分．本节只从理论上给出了把一个多项式分解为不可约因式之积的可能性，唯一性，而对一个具体的多项式如何把它分解为不可约多项式之积的问题，本节并没给出具体的方法．

这节最后给出了标准分解式的形式．利用标准分解式，讲义在（一）中给出了一个多项式整除另一个多项式的充要条件；在（二）中给出了两多项式最大公因式的形式．标准分解式在多项式的整除理论、最大公因式理论中的应用已经在本节（一），（二）中初步看到，并且在下节将会进一步体会到它的价值．

本节命题推论：若$p(x)$是不可约多项式，如果$p(x)|f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$，则 $p(x)|$某一$f_i(x)$，讲义没有给出它的证明．下面利用数学归纳法补证．

当 $s=2$ 时，已由命题得证．

假设对 $s-1$ 成立，我们去证对 s 结论也成立．

事实上，我们把 $f_{s-1}(x)f_s(x)$看成一个多项式，记为$\overline{f}_{s-1}(x)$，这时 $p(x)|f_1(x)\cdots f_{s-2}(x)\overline{f}_{s-1}(x)$．由归纳法假设 $p(x)|$ 某一$f_i(x)$ 或 $p(x)|\overline{f}_{s-1}(x)$．如果 $p(x)|$某一$f_i(x)$，$(i=1,\ 2,\cdots,s-2)$，问题得证．如果 $p(x)|\overline{f}_{s-1}(x)$，即$p(x)|f_{s-1}(x)f_s(x)$，由命题，$p(x)$必整除 $f_{s-1}(x)$或 $f_s(x)$．证完．

§5 重 因 式

为了求出多项式的重因式，在这一节里，引进了导数的概念，利用导数给出重要结论，即若$p(x)$是$f(x)$的一个k（$k\geqslant 1$）重不可约因式，那么$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式．特别地，$f(x)$的单因式不是$f'(x)$的因式．

另外，利用导数，在定理1的推论2，推论3中给出了判断一个多项式是否有重因式的方法：即$f(x)$是否没有重因式决定于$f(x)$与$f'(x)$是否互质．

在这以前，我们仅在形式上给出了标准分解式的定义，在实际上并没给出把一个具体的多项式化为标准分解式的具体方法．初等代数虽然对因式分解问题有详尽的讨论，但在分解多项式的实践中，常常需要把一些个别的技巧综合应用，要获得这一本领是需要长期的经验积累过程．在一般情形下，初等的特殊技巧不能使我们知道给定的多项式是不是可约的，也不能给出彻底分解多项式的一般方法．尽管在实践中这些特殊技巧有着非常重要的意义．

分离重因式法虽然也不能彻底解决多项式的因式分解问题．但利用分离重因式法可以把要分解的多项式$f(x)$中具有同一重数k的不可约因子之积$F_k(x)$，（$k=1,2,\cdots,s$）求出来．如果我们能求出具有重数k的不可约因式之积$F_k(x)(k=1,2,\cdots,s)$的分解式．那么，该分解式中不可约因式在$f(x)$中的重数就是k．于是$f(x)$的标准分解式即可写出来．一般说来，$F_k(x)$的次数小于$f(x)$的次数．这样就把次数较高的多项式$f(x)$的因式分解问题化为次数较低的多项式$F_k(x)$的因式分解问题．使问题变的容易了．

§6 多项式的根

本节首先定义了多项式的根．然后在定理1及其推论中给出了

多项式的根与多项式整除之关系．即 c 为 $f(x)$ 的根的充分必要条件是 $x-c$ 整除 $f(x)$。接着介绍了用一次因式 $x-c$ 除 $f(x)$ 的综合除法．这一节的后半段给出了关于根的个数的三个定理（定理2，定理4，定理5）其中定理2是在一般数域上讨论的．而定理4及定理5是在复数域上讨论的．故其结论仅在复数域上成立。

关于代数基本定理，本节没有给出证明，有兴趣的读者可参看张禾瑞，郝鈵新所著高等代数下册，1959年版．

定理5指出：任何 n 次多项式 $f(x)$ 在复数域中恰有 n 个根．这一结论的证明是容易的．它是定理2及定理4的直接结果，我们可以用数学归纳法证明。

事实上 当 $n=1$ 时，显然有一个根．由定理2知，恰有一个根。

假设对 $n-1$ 次多项式结论成立。

由定理4知 $f(x)$ 在复数域中至少有一个根 α_1。于是

$$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$$

其中 $f_1(x)$是 $n-1$ 次多项式，由归纳法假设 $f_1(x)$ 在复数域中恰有 $n-1$ 个根 α_2，α_3，…，α_n。故 $f(x)$ 在复数域中恰有 n 个根。

书中提到，"有了定理3，使我们可以从另一观点来认识多项式．即把数域 F 上的多项式看成通常所说的函数．" 这需要解决以下问题：（1）每一多项式都定义一个函数．（2）不同的多项式所定义的函数也不同。

正文中对（1）已经做了充分说明．现在对（2）做进一步解释．

事实上，我们只须说明数域 F 上两多项式 $f(x)$与 $g(x)$ 相等的充要条件是它们所定义的 F 上的多项式函数相等．

若 $f(x)=g(x)$。看成两个多项式相等．那么，它们有完全相同的项．因而对 F 中任何数 c，都有

$$f(c)=g(c)$$

这就是说：$f(x)$ 与 $g(x)$所定义的函数是相等的。

反之，设 $f(x)$与 $g(x)$所定义的函数相等。

令

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

那么，对 F 中任何数 c 都有

$$h(c)=f(c)-g(c)=0$$

这就是说 F 中每一个数都是 $h(x)$ 的根．而 F 中有无穷多个数．因此，$h(x)$有无穷多个根．只有零多项式才有这个性质．故

$$h(x)=f(x)-g(x)=0$$

$$f(x)=g(x)$$

即多项式 $f(x)$与 $g(x)$也是相等的。

§7 方程及其变换

本节首先从生产实践的需要出发引进了方程式及方程根的概念。并且指出方程

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

的两边尽管都是多项式．但在一般情况下却不能认为该方程是表示两个相等的多项式．因为相等的两个多项式其同次项的系数必须完全相同．于是，当我们把方程（1）看作是两个相等的多项式组成的方程时，那么，方程（1）就失去了其应有的价值．这时该方程变成了恒等式．任何数都是它的根．因此，相等的两个多项式组成的方程仅是方程式中的一个极特殊的情形．一般地说虽然方程(1)的两边给出的多项式是不等的，但并不排除它们在一些个别的数上有相等的值．解方程的目的就是寻求使方程（1）两端有相等数值的那些个别的数。

其次，书中关于方程的变换讲了4个方法即：倍根变换，倒根变换，平方变换，平移变换．其中以平移变换最常用．

在给定了平移变换 $y=x-k$ 后，要求变换后的新方程 $g(y)$可用综合除法。

具体做法是：

用$x-k$除$f(x)$得商式$q_1(x)$，余数b_0就是$g(y)$的常数项。

用$x-k$除$q_1(x)$得商式$q_2(x)$，余数b_1就是$g(y)$的一次项系数。

再用$x-k$除$q_2(x)$得商式$q_3(x)$，余数b_2就是$g(y)$的二次项系数。

一般的，用$x-k$除商$q_i(x)$得余数b_{i-1}就是$g(y)$的$i-1$次项系数。$g(y)$的首项系数等于$f(x)$的首项系数。

§8 复系数多项式

我们说明两个问题

1. 三次、四次多项式的根式解的求解过程中都直接引用了§7方程的变换中的平移变换。

三次多项式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 \tag{1}$$

借助于平移变换

$$y=x+\frac{a_1}{3}$$

得到不含二次项的三次多项式

$$y^3+py+q \tag{2}$$

如果α是（2）的根，那么$\alpha-\frac{a_1}{3}$就是（1）的根。这样，三次多项式（1）的根式解问题，就归结为推导二次项系数为零的三次多项式（2）的求根公式。四次多项式

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 \tag{3}$$

利用平移变换

$$y=x+\frac{a_1}{4}$$

得到不含三次项的多项式

$$y^4+py^2+qy+r \tag{4}$$

若 α 是（4）的解，则 $\alpha-\frac{a_1}{4}$ 即为（3）的解．这样四次多项式的根式解问题就归结为证明三次项系数为零的四次多项式能用根式解．

2．正文中提到（在卡当公式（6）的后面）在 $u+v$ 的九个值中满足条件

$$uv=-\frac{p}{3}$$

的恰有三个．

事实上，我们可以设 u 的三个值是 $u_1, \omega u_1, \omega^2 u_1$；$v$ 的三个值是 $v_1, \omega v_1, \omega^2 v_1$．并且，$u_1 v_1=-\frac{p}{3}$．这里 ω 是不等于 1 的三次单位根．于是容易看到满足方程

$$uv=-\frac{p}{3}$$

的只有下面三组：

$$\begin{cases} u=u_1, \\ v=v_1; \end{cases} \quad \begin{cases} u=\omega u_1, \\ v=\omega^2 v_1; \end{cases} \quad \begin{cases} u=\omega^2 u_1, \\ v=\omega v_1. \end{cases}$$

§9　实系数多项式

本节开始给出了实系数多项式的复根与其共轭根是成对出现的结果．由此导出了实数域上不可约多项式只有一次和二次的．接着给出了实系数多项式在实数域上的标准分解式．由此，不难想到奇数次的实系数多项式在实数域内的标准分解式必有一次因式．故至少有一个实根．

关于实系数多项式的求根问题，在理论上以及在实际问题上都

是相当重要的，但在多数情况下，要求出实根的精确值是不可能的。因而给出求实根的界，实根的个数的方法也是很有意义的。

关于实根的界，如果我们能求出任一多项式 $f(x)$ 的正根上界，那么借助以下三个等式：

（1） $f_1(x)=x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$，

（2） $f_2(x)=f(-x)$，

（3） $f_3(x)=x^n f\left(-\frac{1}{x}\right)$

我们也能够求出 $f(x)$的正根的下界以及负根的上、下界。

由§7方程的变换知，这里（1）式给出的是倒根变换。

事实上，为把 $f(x)$的未知量与变换后的 f_1 的未知量区别开，令 $y=\frac{1}{x}$，则以 $x=\frac{1}{y}$ 代入 $f(x)$，再通乘以 y^n 即得

$$f_1(y)=y^n f\left(\frac{1}{y}\right)$$

故，若 α 是 $f_1(y)$ 的根，则$\frac{1}{\alpha}$是 $f(x)$的根。

（2）式给出的是负根变换。即 令 $y=-x$，以 $x=-y$ 代入 $f(x)$ 得

$$f_2(y)=f(-y)$$

故，若 α 是 $f_2(y)$的根，则$-\alpha$ 是 $f(x)$ 的根。

（3）式是既有倒根变换，又有负根变换。

事实上，令 $y=-\frac{1}{x}$，则以 $x=-\frac{1}{y}$代入 $f(x)$，再通乘以 y^n 得

$$f_3(y)=y^n f\left(-\frac{1}{y}\right)$$

故，若 α 是 $f_3(y)$的根，则 $-\frac{1}{\alpha}$是 $f(x)$ 的根。

§10 有理系数多项式

关于有理系数多项式，本节讨论了两个问题：在有理数域上的

可约性；有理根的求法。

定理 1 指出：整系数多项式在整数环上可约的充要条件是在有理数域上可约。

定理 2 介绍了整系数多项式在有理数域上不可约的一个判断方法——艾森斯坦因判断法。

这两个定理都是对整系数而言的。但是，如果 $f(x)$ 是有理系数多项式，设 k 是其系数分母的最小公倍数，那么，$kf(x)$ 是整系数多项式。显然，$kf(x)$与 $f(x)=\frac{1}{k}(kf(x))$ 的可约性是相同的。故从这个意义上来讲，定理 2 给出的方法可以用来判断一个有理系数多项式是否在有理数域上不可约。

定理 3 及其推论给出首系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ 其有理根必为整数，且是常数项的约数。讲义接着指出：若整数 c 是$f(x)$的根，那么

$$\frac{f(1)}{c-1} \text{与} \frac{f(-1)}{c+1}$$

都是整数。因此，要求 $f(x)$的根，只须在使

$$\frac{f(1)}{c-1} \text{与} \frac{f(-1)}{c+1}$$

为整数的常数项的约数中寻找。

§11 部分分式

本节通过两个引理和一个定理给出了有理分式化为一个多项式与一些简单分式的和的方法。作法是：若给定的有理分式为形如

$$\frac{f(x)}{p^s(x)}, \ (s\geqslant 1)$$

其中$p(x)$是不可约多项式，那么，可用引理 2 给出的方法，由施行一系列的带余除法之后，再整理得到所要求的形式。如给定的有理分式

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

中，$g(x)$不能写成不可约多项式的幂的形式。那么，可用引理 1 给出的方法。将$\frac{f(x)}{g(x)}$表成形如$\frac{u_i(x)}{p_i^s(x)}$的有理分式之和，其中 $p_i(x)$为不可约多项式，$s\geqslant 1$，再把和中的每一项用引理 2 给出的方法化为一个多项式和一些简单分式之和。

一般常采用待定系数法将一个有理分式化成部分分式。

【例题选解】

例 1　设 $f(x)$与 $g(x)$次数相同，若 $g(x)|f(x)$ 则 $g(x)=cf(x)$

证明　因为 $g(x)|f(x)$。故

$$f(x)=g(x)h(x)$$

由乘积的次数等于次数的和知

$$\deg f(x)=\deg g(x)+\deg h(x)$$

再由 $\deg f(x)=\deg g(x)$知 $\deg h(x)=0$。即 $h(x)$ 是零次多项式。于是$f(x)=c^{-1}g(x)$或 $g(x)=cf(x)$。

例 2　设 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$g_1(x)$，$g_2(x)$ 都是数域F上的多项式，其中 $f_1(x)\neq 0$，且 $f_1(x)f_2(x)$ 能被 $g_1(x)g_2(x)$整除，而$g_1(x)$能被 $f_1(x)$整除。证明 $f_2(x)$能被 $g_2(x)$ 整除。

证明　要证 $f_2(x)$能被 $g_2(x)$整除，只须把 $f_2(x)$表成 $g_2(x)$与一个多项式之积。由整除定义知，存在数域F上的多项式 $q_1(x)$，$q_2(x)$使

$$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)q_1(x) \tag{1}$$

$$g_1(x)=f_1(x)q_2(x)$$

将 $g_1(x)$的表达式代入（1）式得

$$f_1(x)f_2(x)=f_1(x)q_2(x)g_2(x)q_1(x)$$

因为 $f_1(x) \neq 0$，所以

$$f_2(x) = q_2(x)g_2(x)q_1(x)$$

即 $f_2(x)$能被 $g_2(x)$整除.

例 3　证明

$$(f(x),\ g(x)) = (f(x) \pm g(x)u(x),\ g(x))$$

其中 $u(x)$为任意多项式.

证明　设

$$d_1(x) = (f(x),\ g(x))$$

$$d_2(x) = (f(x) \pm g(x)u(x),\ g(x))$$

要证等式成立，只须证 $d_1(x)$与 $d_2(x)$能互相整除. 因为

$$d_1(x) \mid f(x),\ d_1(x) \mid g(x),\text{ 所以}$$

$$d_1(x) \mid f(x) \pm g(x)u(x)$$

故

$$d_1(x) \mid d_2(x)$$

又由 $d_2(x) \mid f(x) \pm g(x)u(x)$，$d_2(x) \mid g(x)$. 所以

$$d_2(x) \mid f(x)$$

从而

$$d_2(x) \mid d_1(x)$$

于是得

$$(f(x),\ g(x)) = (f(x) \pm g(x)u(x),\ g(x))$$

例 4　证明　若 $(f(x),\ g(x)) = 1$，$(f(x),\ h(x)) = 1$，则 $(f(x),\ g(x)h(x)) = 1$.

证明　设 $(f(x),\ g(x)h(x)) = d(x)$，我们如能证明$d(x) \mid f(x)$，$d(x) \mid h(x)$，于是 $d(x) \mid (f(x),\ h(x))$问题即得证.

由$(f(x),\ g(x)) = 1$，故存在 $u(x)$，$v(x)$使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

两边同乘 $h(x)$得

$$u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = h(x)$$

因为 $d(x) \mid f(x)$，$d(x) \mid g(x)h(x)$，所以由上式知 $d(x) \mid h(x)$.

故 $d(x)|(f(x), h(x))$。但$(f(x), h(x))=1$ 因此，$d(x)=1$。

例 5　证明：如果 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，$d(x)=(f(x), g(x))$，且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x) \tag{1}$$

则 $(u(x), v(x))=1$。

证明　要证 $(u(x), v(x))=1$，只须证明能找到两个多项式 $f_1(x)$，$g_1(x)$使

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$$

设 $f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$。将 $f(x)$及 $g(x)$ 的表达式代入（1）式得

$$u(x)f_1(x)d(x)+v(x)g_1(x)d(x)=d(x)$$

因为 $d(x)\neq 0$，所以

$$u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$$

即　　$(u(x), v(x))=1$。

例 6　若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x)h(x), g(x))=(h(x), g(x))$。

证明　要证明 $(f(x)h(x), g(x))=(h(x), g(x))$，只须证明等式两边能互相整除。

设 $d_1(x)=(f(x)h(x), g(x))$，$d_2(x)=(h(x), g(x))$，由于 $d_2(x)|g(x)$，$d_2(x)|h(x)$，知 $d_2(x)|f(x)h(x)$。于是，$d_2(x)|d_1(x)$。

再由 $d_1(x)|g(x)$，$d_1(x)|f(x)h(x)$，又 $(f(x), g(x))=1$，故 $d_1(x)|h(x)$，从而有 $d_1(x)|d_2(x)$。于是

$$d_1(x)=d_2(x)。$$

即

$$(f(x)h(x), g(x))=(h(x), g(x))$$

例 7　设

$$f(x)=x^5+x^4-x^3-2x-1$$

$$g(x)=3x^4+2x^3+x^2+2x-2$$

求 $(f(x),\ g(x))$。

解　在施行辗转相除法时，为避免分数，在做除法时，可用 F 中不等于零的数乘被除式或除式。而且不仅在每一次除法开始时可以这样做，就是在进行除法的过程中也可以这样做。

先把 $f(x)$ 乘以 3，再用 $g(x)$ 来除：

$$
\begin{array}{l|l}
3x^5+3x^4-3x^3\qquad\quad -6x-3 & \underline{3x^4+2x^3+x^2+2x-2} \\
\underline{3x^5+2x^4+x^3+2x^2-2x} & x+1 \\
\qquad x^4-4x^3-2x^2-4x-3 & \\
\qquad\quad (\text{乘以 } 3) & \\
3x^4-12x^3-6x^2-12x-9 & \\
\underline{3x^4+\ \ 2x^3+\ \ x^2+\ \ 2x-2} & \\
\quad -14x^3-7x^2-14x-7 &
\end{array}
$$

约去公因子 -7，得到第一余式

$$r_1(x)=2x^3+x^2+2x+1$$

把 $g(x)$ 乘 2，再用 $r_1(x)$ 除：

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4+4x^3+2x^2+4x-4 & \underline{2x^3+x^2+2x+1} \\
\underline{6x^4+3x^3+6x^2+3x} & 3x+1 \\
\qquad x^3-4x^2+\ \ x-4 & \\
\qquad\quad (\text{乘以 } 2) & \\
2x^3-8x^2+2x-8 & \\
\underline{2x^3+\ \ x^2+2x+1} & \\
\quad -9x^2\qquad -9 &
\end{array}
$$

约去公因子 -9，得第二余式

$$r_2(x)=x^2+1$$

再用 $r_2(x)$ 去除 $r_1(x)$：

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+x^2+2x+1 & \underline{x^2+1} \\
\underline{2x^3\qquad +2x} & 2x+1 \\
\qquad x^2\qquad +1 & \\
\underline{\qquad x^2\qquad +1} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

故 $(f(x), g(x))=x^2+1$。

例 8　证明　若 $f^2(x)|g^2(x)$，则 $f(x)|g(x)$。

证明　可设 $f(x)$，$g(x)$ 的一般标准分解式为

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),\quad k_i\geqslant 0$$

$$g(x)=b_0p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),\quad l_i\geqslant 0$$

这里 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一般标准分解式中含有的不可约因式可能不一致。比方 $g(x)$ 中含有 $p_1(x)$，但 $f(x)$ 中根本不含有 $p_1(x)$，这时 $k_1=0$。因此，我们总可以形式的把 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的标准分解式中所含的不可约因式写成一致的，而

$$f^2(x)=a_0^2p_1^{2k_1}(x)p_2^{2k_2}(x)\cdots p_s^{2k_s}(x)$$

$$g^2(x)=b_0^2p_1^{2l_1}(x)p_2^{2l_2}(x)\cdots p_s^{2l_s}(x)$$

由 $f^2(x)|g^2(x)$ 知，$0\leqslant 2k_i\leqslant 2l_i$，亦即

$$0\leqslant k_i\leqslant l_i,\quad (i=1, 2, \cdots, s)$$

于是

$$f(x)|g(x)。$$

例 9　证明 $(f(x), g(x))^m=(f^m(x), g^m(x))$，这里 m 为正整数。

证明　设 $f(x)$，$g(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)q_1^{\lambda_1}(x)\cdots q_t^{\lambda_t}(x)$$

$$g(x)=b_0p_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)h_1^{\mu_1}(x)\cdots h_s^{\mu_s}(x)$$

这里 $h_i(x)\ (i=1, 2, \cdots, s)$ 与 $q_j(x)\ (j=1, 2, \cdots, t)$ 皆不相同，则

$$(f(x), g(x))=p_1^{n_1}(x)p_2^{n_2}(x)\cdots p_r^{n_r}(x),$$

其中，$n_i=\min(k_i, l_i)$，$(i=1, 2, \cdots, r)$

而

$$f^m(x)=a_0^mp_1^{mk_1}(x)p_2^{mk_2}(x)\cdots p_r^{mk_r}(x)q_1^{m\lambda_1}(x)\cdots q_t^{m\lambda_t}(x)$$

$$g^m(x)=b_0^mp_1^{ml_1}(x)p_2^{ml_2}(x)\cdots p_r^{ml_r}(x)h_1^{m\mu_1}(x)\cdots h_s^{m\mu_s}(x)$$

因为 $\min(k_i, l_i)=n_i$，所以，$\min(mk_i, ml_i)=mn_i$，$(i=1,2,\cdots, r)$。从而

$$
\begin{aligned}
(f^m(x),\ g^m(x)) &= p_1^{mn_1}(x)\,p_2^{mn_2}(x)\cdots p_r^{mn_r}(x)\\
&= [p_1^{n_1}(x)\,p_2^{n_2}(x)\cdots p_r^{n_r}(x)]^m\\
&= (f(x),\ g(x))^m
\end{aligned}
$$

证完。

例10　判断多项式 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 有无重因式，如果有，试求出其重数。

解　首先求 $f'(x)$

$$f'(x)=3x^2-2x-1$$

用辗转相除法求 $(f(x),\ f'(x))=d(x)$。将 $f(x)$ 乘以 3 再除以 $f'(x)$。

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-3x^2-3x+3 & 3x^2-2x-1\\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-2x^2-x} & x-1\\
-x^2-2x+3 &
\end{array}
$$

（乘以 3 ）

$$
\begin{array}{r}
-3x^2-6x+9\\
\underline{-3x^2+2x+1}\\
-8x+8
\end{array}
$$

约去公因子 -8得第一余式，$r_1(x)=x-1$。用 $r_1(x)$ 去除$f'(x)$。

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2-2x-1 & x-1\\ \cline{2-2}
\underline{3x^3-3x} & 3x+1\\
x-1 &\\
\underline{x-1} &\\
0 &
\end{array}
$$

$d(x)=x-1$。故 $x-1$ 是 $f(x)$的二重因式。

例11　利用分离重因式法求多项式

$$f(x)=x^4-6x^2+8x-3$$

的标准分解式。

解　$f'(x)=4x^3-12x+8$

利用辗转相除法依次求得

$$d_1(x)=(f(x),\ f'(x))=x^2-2x+1$$

$$d_2(x) = (d_1(x),\ d_1'(x)) = x-1$$
$$d_3(x) = (d_2(x),\ d_2'(x)) = 1$$

于是

$$h_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = x^2+2x-3$$

$$h_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = x-1$$

$$h_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = x-1$$

从此得出

$$F_1(x) = \frac{h_1(x)}{h_2(x)} = x+3$$

$$F_2(x) = \frac{h_2(x)}{h_3(x)} = 1$$

$$F_3(x) = h_3(x) = x-1$$

这样，$f(x)$ 有一个一重因式 $x+3$ 及一个三重因式 $x-1$，没有二重因式．所以，$f(x)$的标准分解式为

$$f(x) = (x+3)(x-1)^3$$

下面把例中的具体计算写出来．

先求 $d_1(x)$，为了避免分数，将 $f(x)$乘 4 ，再做除法。

$$\begin{array}{r|l} 4x^4-24x^2+32x-12 & 4x^3-12x+8 \\ \cline{2-2} 4x^4-12x^2+8x & x \\ \hline -12x^2+24x-12 & \end{array}$$

约去公因子 -12得第一余式 $r_1(x) = x^2-2x+1$

将 $f'(x)$除以 $r_1(x)$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 \qquad\quad -12x+8 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} 4x^3-8x^2+\ \ 4x & 4x+8 \\ \hline 8x^2-16x+8 & \\ 8x^2-16x+8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

故

$$d_1(x)=(f(x),\ f'(x))=x^2-2x+1$$

再求 $d_2(x)$：因为 $d_1(x)=(x-1)^2$。所以，$d_1(x)$ 与 $d_1'(x)$ 的最大公因式必为 $x-1$。即 $d_2(x)=x-1$。

求 $d_3(x)$：因为 $d_2'(x)=1$，所以

$$d_3(x)=(d_2(x),\ d_2'(x))=1.$$

于是

$$d_1(x)=x^2-2x+1$$

$$d_2(x)=x-1$$

$$d_3(x)=1$$

再计算 $h_1(x)$：

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad -6x^2+8x-3 & x^2-2x+1 \\
\underline{x^4-2x^3+\ \ x^2 \qquad\qquad} & x^2+2x-3 \\
2x^3-7x^2+8x-3 & \\
\underline{2x^3-4x^2+2x \qquad} & \\
-3x^2+6x-3 & \\
\underline{-3x_2+6x-3} & \\
0 &
\end{array}$$

故 $$h_1(x)=\frac{f(x)}{d_1(x)}=x^2+2x-3$$

另外

$$h_2(x)=\frac{d_1(x)}{d_2(x)}=\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1$$

$$h_3(x)=\frac{d_2(x)}{d_3(x)}=\frac{x-1}{1}=x-1$$

以及

$$F_1(x)=\frac{h_1(x)}{h_2(x)}=x+3$$

$$F_2(x)=1$$

$$F_3(x)=x-1$$

故 $f(x)=(x+3)(x-1)^3$ 为 $f(x)$的标准分解式。

例12 设不可约多项式$p(x)$是 $f'(x)$的$k-1$重因式。证明$p(x)$是 $f(x)$的 k 重因式的充要条件是 $p(x)\mid f(x)$。

证明 必要性是明显的。现证充分性。

可设$p(x)$是$f(x)$的 s 重因式，即

$$f(x)=p^s(x)l(x),\ p(x)\text{不整除}l(x)$$

于是

$p(x)$是$f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$，$\cdots$，$f^{(s-1)}(x)$的因式，但不是$f^{(s)}(x)$的因式。

又因 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式，所以又有

$p(x)$是 $f'(x)$，$f''(x)$，$\cdots$，$f^{(k-1)}(x)$ 的因式，但不是 $f^{(k)}(x)$的因式。这样，必须 $s=k$，即 $p(x)$ 是 $f(x)$的 k 重因式。

例13 试决定系数 a，使 -1是多项式

$$f(x)=x^5-ax^2-ax+1$$

的二或三重以上的重根。

实际上，若 -1 是 $f(x)$ 的重根，其重数是大于等于2，则 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 所得余式必为0，而 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 可以连续两次用综合除法，以 $x+1$ 去除 $f(x)$，再以 $x+1$ 去除其商来实现。再令其余式为0，从而解出 a 值。

解 将 $f(x)$除以 $x+1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & 0 & -a & -a & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1-a & 1 & 0 \end{array}$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^4-x^3+x^2-(1+a)x+1) \\ &= (x+1)q_1(x) \end{aligned}$$

再将 $q_1(x)$除以 $x+1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & 1 & -(1+a) & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & -4-a & 5+a \end{array}$$

从此得

$$q_1(x) = (x+1)(x^3-2x^2+3x-(4+a)) + (5+a)$$
$$= (x+1)q_2(x) + r_2(x)$$

令余式 $r_2(x) = 5 + a = 0$ 得 $a = -5$。于是

$$f(x) = (x+1)^2(x^3-2x^2+3x+1)$$
$$= (x+1)^2 q_2(x)$$

这样，$a = -5$ 即为 -1 至少是 $f(x)$ 的二重根的条件，但 -1 不是 $f(x)$ 的三重根. 因为将 $q_2(x)$ 除以 $x+1$，即有

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -5 \end{array}$$

所得余式（为 -5）不为 0 。

例14 证明 $\sin x$ 不能表成 x 的多项式.

证明 我们用反证法来证明.

假设 $\sin x$ 能表成 x 的多项式：$\sin x = f(x)$，令 $\deg f(x) = n$，则由本节定理 2 ，$f(x)$ 最多有 n 个不同的根(零点)，这与 $\sin x$ 有无穷多个零点相矛盾. 故 $\sin x$ 不能表成 x 的多项式.

例15 假定实系数多项式 $x^4 - 6x^3 + ax^2 + 6x + 2$ 有 4 个实根. 证明至少有一个根小于 1 。

证明 我们用反证法，利用根与系数的关系证明.

假定 4 个实根都不小于 1 ，则可写成 $1 + x_i$ 而 $x_i \geqslant 0$，$i = 1, 2, 3, 4$. 由根与系数之关系：

$$(1+x_1) + (1+x_2) + (1+x_3) + (1+x_4) = 6, \qquad (1)$$
$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) = 2, \qquad (2)$$

由 (1)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

由 (2)

$$2 = (1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)(1+x_4) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{4} x_i$$
$$= 1 + 2 = 3$$

这矛盾说明该多项式必须至少有一个根小于 1 。

例16　设 $f(x)=x^3+6x^2-3x-1=0$，求出以 $f(x)=0$ 的根的 $k(k\neq 0)$ 倍为根的方程。

解　取 $y=kx$，以 $x=\frac{1}{k}y$ 代入 $f(x)$ 得

$$f\left(\frac{1}{k}y\right)=\frac{1}{k^3}y^3+6\,\frac{1}{k^2}\,y^2-3\,\frac{1}{k}y-1$$

再通乘以k^3得

$$g(y)=y^3+6ky^2-3k^2y-k^3=0$$

即为所求。

例17　设　$f(x)=x^4+2x^3+6x^2-6x+1=0$。求出以$f(x)=0$根的倒数为根的方程。

解　取变换 $y=\frac{1}{x}$，以 $x=\frac{1}{y}$ 代入方程得

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{y^4}+2\left(\frac{1}{y^3}\right)+6\left(\frac{1}{y^2}\right)-6\left(\frac{1}{y}\right)+1=0$$

再通乘以 y^4 得

$$g(y)=1+2y+6y^2-6x^3+y^4=0$$

即为所求。

例18　作一个 3 次方程，使其 3 个根恰是方程　$f(x)=3x^3+x^2+1=0$ 的 3 个根的各自平方。

解　$(-1)^3f(x)f(-x)=-(3x^3+x^2+1)(-3x^3+x^2+1)$

$$=9x^6-x^4-2x^2-1$$

将 $x^2=y$ 代入上式得

$$g(y)=9y^3-y^2-2y-1$$

则 $g(y)=0$ 即为所求方程。

例19　设　$f(x)=x^3+6x^2-3x+1=0$，求出以方程 $f(x)=0$的根加 -2为根的方程。

解　本例实际上就是要求经平移变换 $y=x-2$ 后得到的新方程$g(y)=b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0=0$。我们用综合除法来解。

以 $x-2$ 除 $f(x)$得

$$f(x)=(x^2+8x+13)(x-2)+27$$

$$= q_1(x)(x-2)+27 \qquad \cdots\cdots\cdots b_0 = 27$$

再以 $x-2$ 除 $q_1(x)$ 得

$$q_1(x) = (x+10)(x-2)+33$$

$$= q_2(x)(-2)+33 \qquad \cdots\cdots\cdots b_1 = 33$$

再以 $x-2$ 除 $q_2(x)$ 得

$$q_2(x) = (x-2)+12 \qquad \cdots\cdots\cdots b_2 = 12$$

而 $b_3 = a_3 = 1$。故

$$g(y) = y^3 + 12y^2 + 33y + 27$$

即为所求方程。

例20　求多项式 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ 实根的个数，并且用相邻整数把实根分离开。

解　首先按定理 1 确定实根的界。因为

$$B = 2, \quad m = 2, \quad a_0 = 1.$$

所以，$N = 1 + \sqrt{\frac{2}{1}} = 1 + \sqrt{2}$。按本题要求可取整数 3 为 $f(x)$ 的正根上界。

为了求 $f(x)$ 的正根下界，负根上，下界。我们先求出下列三个多项式的正根上界。

$$f_1(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$= x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f_2(x) = f(-x) = -x^3 + x^2 + 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 f\left(-\frac{1}{x}\right) = x^3\left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x} + 1\right)$$

$$= x^3 + 2x^2 + x - 1$$

在 $f_1(x)$ 中，因为 $B = 2$，$a_0 = 1$，$m = 1$，所以，$N_1 = 1 + \frac{2}{1} = 3$。

在 $f_2(x)$ 中，由于首项系数是负数不能用定理 1 确定其正根上界。但 $f_2(x)$ 与 $-f_2(x)$ 有相同的根。而 $-f_2(x)$ 的首项为正。故

可用 $-f_2(x)$ 来代替 $f_2(x)$ 求其正根上界。

$$-f_2(x)=x^3-x^2-2x-1$$

此时，$B=2$，$m=1$，$a_0=1$，$N_2=1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}=1+2=3$

在 $f_3(x)$ 中：$B=1$，$m=3$，$a_0=1$，因此，$N_3=1+\sqrt[m]{\frac{B}{a_0}}=1+1=2$。于是

$f(x)$ 的正根下界为 $\frac{1}{N_1}=\frac{1}{3}$

$f(x)$ 的负根下界为 $-N_2=-3$

$f(x)$ 的负根上界为 $-\frac{1}{N_3}=-\frac{1}{2}$

按本题要求可取整数 0 为正根下界与负根上界．即

$f(x)$ 正根上界为 3．

$f(x)$ 正根下界为 0，

$f(x)$ 负根上界为 0，

$f(x)$ 负根下界为 -3。

其次求出 $f(x)$ 的斯图姆组。

为了避免分数系数，在做除法时可以用一个正数乘被除式或除式。这样做不会改变斯图姆组的变号数，但禁止用负数去乘被除式或除式。

$$f_0(x)=f(x)=x^3+x^2-2x+1$$

$$f_1(x)=f'(x)=3x^2+2x-2$$

用 $f'(x)=f_1(x)$ 去除 $f(x)$，把余式乘 -1 后取作 $f_2(x)$

$$f_2(x)=10x-7,$$

再用 $f_2(x)$ 去除 $f_1(x)$，把余式乘 -1 后取作 $f_3(x)$：

$$f_3(x)=1.$$

最后，列表计算斯图姆组的变号数。

	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$V(x)$
$x=-3$	−	+	−	+	3
$x=-2$	+	+	−	+	2
$x=-1$	+	−	−	+	2
$x=0$	+	−	−	+	2
$x=1$	+	+	+	+	0
$x=2$	+	+	+	+	0
$x=3$	+	+	+	+	0

故在（-3，-2）有一个实根，在（0，1）之间有 2 个实根。

例21　求多项式

$$f(x)=4x^4-7x^2-5x-1$$

的有理根。

解　首先将 $f(x)$ 化为首系数为 1 的整系数多项式 $g(y)$，再求出 $g(y)$ 的所有整数根。然后再利用 $g(y)$ 的整数根求出 $f(x)$ 的有理根。

以 4^3 乘 $f(x)$ 得

$$4^3f(x)=(4x)^4-4\times7(4x)^2-4^2\times5(4x)-4^3$$

在上式中令 $y=4x$ 得

$$g(y)=y^2-28y^2-80y-64$$

再求 $g(y)$ 的所有整数根。这里常数项的因子是 ±1，±2，±4，±8，±16，±32，±64，$g(1)=-171$，$g(-1)=-11$，而

$$\frac{g(1)}{-2-1}=\frac{-171}{-3}=57,\qquad \frac{g(-1)}{-2+1}=\frac{-11}{-1}=11$$

都是整数，作综合除法

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 0 & -28 & -80 & -64 \\ \hline & 1 & -2 & -24 & -32 & 0 \end{array}$$

故 -2 是 $g(y)$ 的根。

$$g(y)=(y+2)(y^3-2y^3-24y-32)$$

$$= (y+2)q_1(y)$$

接着再求 $q_1(y)$ 的整数根。其常数项因子为 ± 1，± 2，± 4，± 8，± 16，± 32，而 $q_1(1) = -57$，$q_1(-1) = -15$。$\dfrac{q_1(1)}{-2-1} = 19$，$\dfrac{q_1(-1)}{-2+1} = 15$，都是整数，作综合除法

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -24 & -32 \\ \hline & 1 & -4 & -16 & 0 \end{array}$$

故 -2 是 $q_1(y)$ 的根。

$$q_1(y) = (y+2)(y^2-4y-16)$$
$$= (y+2)q_2(y)$$

$q_2(y)$ 的常数项因子为 ± 1，± 2，± 4，± 8，± 16，而 $q_2(1) = -19$，$q_2(-1) = -11$。在常数项因子中使

$$\frac{q_2(1)}{c-1} \text{ 及 } \frac{q_2(-1)}{c+1}$$

为整数的因子 c 不存在。故 $q_2(y)$ 没有整数根。于是 $g(y)$ 共有两个相同的整数根，即 -2 是其 2 重根。将 -2 除以 4 得 $f(x)$ 的 2 重根 $-\dfrac{1}{2}$。

例22　设 p_1，p_2，…，p_r 是 r 个互不相同的质数。n 是大于 1 的整数，证明 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_r}$ 是无理数。

证明　如果我们能指出 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_r}$ 是一个在有理数域上不可约多项式的根，则 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_r}$ 就是无理数。

设

$$f(x) = x^n - p_1p_2\cdots p_r,$$

则 $f(x)$ 是有理系数多项式。我们证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

因为在 $f(x)$ 中 $a_0 = p_1p_2\cdots p_r$，$a_n = 1$，选取质数 p_1，则 $p_1 | a_0$，p_1 不整除 a_n，p_1^2 不整除 a_0。由艾森斯坦因判别法知 $f(x)$ 是有理数域上不可约多项式。而 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_r}$ 显然是 $f(x)$ 的根。故 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_r}$ 是无理数。

例23　设 $f(x)$，$g(x)$ 是整系数多项式。且 $g(x)$ 是本原多项

式．证明：如果 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$是有理系数多项式．那么，$h(x)$一定是整系数多项式．

证明　我们设法把 $h(x)$ 写成一个既约分数与一个本原多项式的乘积，再利用本原多项式性质即可证明．其证法如下：

令 $h(x)$的系数公分母为 b，则

$$h(x)=\frac{1}{b}h_1(x)$$

$h_1(x)$为整系数多项式，再令 a 为 $h_1(x)$的系数的最大公约数，则

$$h(x)=\frac{a}{b}\ h_2(x)=\frac{p}{q}h_2(x)$$

其中 $(p,\ q)=1$，且 $q>o$，而 $h_2(x)$是本原多项式．于是

$$f(x)=\frac{p}{q}g(x)\ h_2(x)$$

由于$f(x)$为整系数多项式，所以，多项式 $g(x)h_2(x)$ 的每一个系数与 p 的乘积都必须被 q 整除．但$(p,\ q)=1$，所以 $g(x)h_2(x)$ 的每一个系数必被 q 整除．即 q 为多项式 $g(x)h_2(x)$ 的系数的一个公约数．因为两个本原多项式 $g(x)$与 $h_2(x)$之积 $g(x)h_2(x)$仍为本原多项式．因此，$q=1$，而$h(x)=ph_2(x)$为整系数多项式．

例24　把　$\dfrac{4x^3-11x^2+6x+3}{(x-1)^3(x-2)}$

分解成部分分式

解　如果有理分式的分母不是标准分解式，首先应化为标准分解式．这里因已给标准分解式，故可设

$$\frac{4x^3-11x^2+6x+3}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{(x-1)^2}+\frac{a_3}{(x-1)^3}+\frac{b}{x-2}$$

以$(x-1)^3(x-2)$通乘两端，得

$$4x^3-11x^2+6x+3$$

$$=a_1(x-1)^2(x-2)+a_2(x-1)(x-2)+a_3(x-2)$$

$$+b(x-1)^3, \qquad (1)$$

有两种办法来确定待定系数：

1. 直接比较两端同类项系数。

2. 令 x 为某一数，来比较等号两端的值。

现在我们用第 2 种办法来确定待定系数的值。

令 $x=1$，则左端等于 2，右端等于 $-a_3$，故 $a_3=-2$。

令 $x=2$，则左端等于 3，右端等于 b，故 $b=3$。

令 $x=0$，则 $3=-2a_1+2a_2-2a_3-b$，把 $a_3=-2$，$b=3$代入上式，得

$$a_1-a_2=-1$$

比较（1）式等号两端 x^3的系数，得 $4=a_1+b$。由 $b=3$，得 $a_1=1$。因此，$a_2=2$，于是

$$\frac{4x^3-11x^2+6x+3}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{3}{x-2}.$$

第三章　多元多项式

【内容提要】

一　内容概述

多元多项式是一元多项式的自然扩充，而一元多项式是多元多项式的一种特殊情形。因而在学习了一元多项式的基础上，自然会想到多元多项式的问题。关于多元多项式我们也可以建立与一元多项式平行的整除理论，以及根的存在及求根方面的有关理论。但鉴于多元多项式的复杂性，本章只能讨论以下两个问题：

1．多元多项式的基本概念；

2．对称多项式基本理论及其应用。

二　内容要点

本章的基本概念有：多元多项式、多元多项式的字典排列法、对称多项式。

基本结论是：对称多项式基本定理。

基本方法有：

1．将对称多项式用初等对称多项式表出的待定系数法；

2．分母有理化方法。

三　基本要求

本章仅要求读者掌握上述的三个基本方面（概念、结论、方法）

【内容分析】

§1　多元多项式的定义及运算

本节介绍了多元多项式的基本概念，多元多项式的运算（加法和乘法），多元多项式的字典排列方法，以及由定理1给出的关于两个多项式乘积的首项等于两个多项式首项之积的重要性质。这些内容都是全章的基础。

为了加深对多元多项式基本特点的认识和理解，有必要回顾一下一元多项式，而将多元多项式与一元多项式加以比较。

它们的区别是：

1．在一元多项式的标准形式中（即合并同类项后）次数相同的项只有一项．可以按升幂（或降幂）排列．而在多元多项式中，次数相同的项可能不只一项，因而，不能按升幂（或降幂）排列．否则，无法区别次数相同项的先后顺序，于是，给出了字典排列法。

2．在一元多项式中，次数相同的项称为同类项，但在多元多项式中．次数相同的项，有的是同类项，有的不是同类项．多元多项式的同类项是指有相同指数组的两个单项式．因而次数相同的两个单项式可能指数组不同，所以，有的不是同类项．

3．一元多项式的首项是指次数最高的项，然而在多元多项式中次数最高的项不一定是首项，它的首项是按各项指数组的先后顺

序而定的。因为在字典排列法中，每一项对应一个指数组，而指数组之间规定了先后关系。所以，各项间的先后关系也就相应确定了，首项当然就唯一确定了。

多元多项式与一元多项式相同的地方是在加法与乘法运算方面没有本质区别。加法，实际上就是把同类项合并起来，不是同类项的项用“+”号连接起来。乘法则是把一个多项式的各项分别乘以另一多项式的各项，然后把同类项合并起来，不是同类项的项用“+”号连接起来。

§2 对称多项式

对称多项式是多元多项式中的一种特殊类型，在下节我们可以看到它在分母有理化方面的应用。

所谓对称多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$即指任意对换两个文字的位置，$f(x_1, \cdots, x_n)$恒不变，那么 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 就是对称多项式。

例 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3$

把其中任两个文字比如：x_1，x_2位置对换，那么x_1^3换为x_2^3，而 x_2^3变为 x_1^3又 x_3^3不动。所得的多项式还是$f(x_1, x_2, x_3)$本身。故 f 是对称多项式。

在对称多项式的集合中，存在一类特殊简单而又重要的初等对称多项式，它们的作用很像一元多项式中的不可约多项式。在那里不可约多项式能生成全体多项式，而这里的初等对称多项式也能生成全体对称多项式。换句话说：每一个对称多项式都可用初等对称多项式表示出来。而且，这种表示法是唯一的。上述结论在定理1中不仅给出详细证明，而且，在证明过程中给出了把一个对称多项式表为初等对称多项式的多项式的一种方法。

本节定理证明的基本想法是：对于给定的对称多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的首项$a_1x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$构造由初等对称多项式组成的单项式$g_1=a_1\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$，它的首项与 f 的首项相同

因此$f-g_1=f_1$的首项低于 f 的首项．设f_1的首项为$a_2x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$，构造 $g_2=a_2\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}\cdots\sigma_n^{l_n}$则$g_2$的首项与$f_1$ 的首项相同．故$f_1-g_2=f_2$的首项低于 f_1 的首项．如此不断的消去首项，得到一串对称多项式 f，f_1，f_2，…，f_i，…。

设 $bx_1^{l'_1}x_2^{l'_2}\cdots x_n^{l'_n}$ 是某一f_i 的首项，由于 f_i 是对称多项式，所以

$$l'_1\geqslant l'_2\geqslant\cdots\geqslant l'_n \tag{1}$$

再由f_i的首项低于 f 的首项．因而

$$k_1\geqslant l'_1 \tag{2}$$

因k_1是一个确定的非负整数，所以，满足（1）与（2）的所有不同指数组只能有有限多个。因此，也只能有有限多个对称多项式f_i不等于零，从而必有某一 s 使$f_s=0$。于是有

$$f-g_1=f_1$$
$$f_1-g_2=f_2$$
$$\vdots$$
$$f_{s-1}-g_s=f_s=0$$

将它们加起来，整理得到

$$f=g_1+g_2+\cdots+g_s$$

即解决了将 f 用初等对称多项式表出的问题。

基于上述想法，当对称多项式 f 给定后，其首项的指数组就确定了，因为每一项都唯一确定一个指数组，不同的指数组决定了不同的项．所以，我们可以把小于（或称后于）首项指数组的所有不同指数组决定的所有不同项写出，而当给定的 f 是齐次对称多项式时，这些不同指数组的确定是容易的．最后，再用待定系数法确定其系数。

若给定的对称多项式不是齐次的，首先要写成一些齐次对称多项式的和，然后，再利用待定系数法把其中的每一个齐次对称多项式表成初等对称多项式的多项式。

关于定理的唯一性证明，我们再做进一步解释。

实际上，要证 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 只有一个，只须证：如果 $h(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 那么，必有

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \neq g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

因为它显然等价于：如果

$$h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$$

那么，必有

$$h(y_1, y_2, \cdots, y_n) = g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

对于前者的证明，书中提到：

令 $h - g = u$，于是去证

若 $u(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$，则$u(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) \neq 0$就行了。

设

$$u(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n) = \Sigma b_{k_1\cdots k_n}\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n}$$

并设

$$b_{k_1k_2\cdots k_n}\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\cdots\sigma_n^{k_n} \tag{1}$$

$$b_{l_1l_2\cdots l_n}\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\cdots\sigma_n^{l_n} \tag{2}$$

是$u(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$中任意两个不同类的项，如果我们能指出：把这两个单项式展开成关于 $x_1, \cdots, x_n$的多项式时，它们的首项是不同类的，因而在它们的代数和中自然不能相消．问题就已解决。

事实上（1）的首项为

$$b_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}(x_1x_2)^{k_2}\cdots(x_1\cdots x_n)^{k_n}$$

$$= b_{k_1\cdots k_n}x_1^{k_1+\cdots+k_n}x_2^{k_2+\cdots+k_n}\cdots x_n^{k_n}, \tag{3}$$

（2）的首项为

$$b_{k_1\cdots k_n}x_1^{l_1}(x_1x_2)^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$$

$$= b_{l_1\cdots l_n}x_1^{l_1+\cdots+l_n}x_2^{l_2+\cdots+l_n}\cdots x_n^{l_n}, \tag{4}$$

因为 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \neq (l_1, l_2, \cdots, l_n)$，故（3）与（4）的指数组是不同的。否则，很容易推出 $k_i = l_i$，即$(k_1, \cdots, k_n) = (l_1 \cdots, , l_n)$得出矛盾结果。从而知（1）与（2）的首项是不同的。

另外，补充证明以下几点。

1．讲义中提到对称多项式的和与积仍是对称多项式。

事实上 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的对称多项式，则对其和

$f(x_1, \cdots, x_n)+g(x_1, \cdots, x_n)=h(x_1, \cdots, x_n)$ 的未知量施行任意对换相当于在 f 中与 g 中施行对换．由 f 与 g 都是对称多项式，故对其未知量施行任意对换后 f 与 g 均不发生变化．从而 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也不改变．即 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是对称多项式．

同法可证对称多项式的积仍是对称多项式．

2．对称多项式的多项式还是对称多项式．亦即，设 $f_1, f_2, \cdots, f_m$都是关于$x_1, x_2, \cdots, x_n$的对称多项式，而 $g(y_1, y_2, \cdots, y_m)$是任意多项式，则$g(f_1, \cdots, f_m)$是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式．

事实上 设

$$g(y_1, \cdots, y_m)=\Sigma a_{k_1\cdots k_m}y_1^{k_1}\cdots y_m^{k_m}$$

那么

$$g(f_1, \cdots, f_m)=\Sigma a_{k_1\cdots k_m}f_1^{k_1}\cdots f_m^{k_m}$$

因为对称多项式之积还是对称多项式．所以，每一 $f_i^{k_i}(i=1, 2, \cdots, m)$都是对称多项式，它们的积$f_1^{k_1}\cdots f_m^{k_m}$也是对称多项式．再由对称多项式的和也是对称多项式得

$$\Sigma a_{k_1\cdots k_m}f_1^{k_1}f_2^{k_2}\cdots f_m^{k_m}$$

也是对称多项式．

§3 分母有理化

本节利用对称多项式基本定理给出分母有理化的一个可行办法．而对称多项式理论的作用在于：

若把$\dfrac{1}{g(\alpha)}$分母有理化，只须找到一个有理数域Q上的以α为根的n次多项式$f(x)$，其n个根 $\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$都不是 $g(x)$的

根。那么，用$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$乘分子，分母。这时，分母$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$就实现了有理化。这是因为$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)$是有理数域上关于$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的对称多项式，可表为有理数域上的关于$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的初等对称多项式的多项式，而关于$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$的每个初等对称多项式都等于$f(x)$的某一个系数，或与$f(x)$的某系数相差一个符号。因为$f(x)$是有理系数多项式，所以这些初等对称多项式都是有理数。这些有理数的和，差，积仍是有理数。即$g(\alpha_1)\cdots g(\alpha_n)$是有理数。

把一个分式的分母有理化的具体过程可按讲义列出的五步进行。

这里要指出的是：

1．因为$g(\alpha)$是有理系数多项式，故这里选择的α一定是无理数。否则，将不存在分母有理化问题。

2．因为α是无理数，故以$(x-\alpha)$除$f(x)$所得商式$q(x)$的系数b_i不都是有理数。

3．本节最后提到：在解例2的过程中还可以看到，步骤（4）与（5）也可以不必计算而写出结果。事实上，总有

$$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_2\cdots\alpha_n=b_{n-1},$$

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=a_n,$$

而b_{n-1}与a_n已经在步骤（2），（3）中计算出结果了。这里，我们对此再做一些补充说明：因为

$$f(x)=x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^na_n$$

$$q(x)=x^{n-1}-b_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1}$$

而$q(x)$是以$x-\alpha$除$f(x)$得的商式。α_1，α_2，…，α_n是$f(x)$的n个根。α_2，…，α_n是$q(x)$的$n-1$个根。由韦达公式

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=a_n$$

$$\alpha_2\cdots\alpha_n=b_{n-1}$$

又因为在例2中取整个分母为α，$g(x)=x$。所以，$g(\alpha_i)=\alpha_i$。从而

$$g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_2\cdots\alpha_n=b_{n-1},$$

$$g(\alpha_1)g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_n)=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=a_n.$$

显然，a_n 已经在步骤 2 中算出，b_{n-1} 已经在步骤 3 中 算 出.

【例题选解】

例 1　齐次多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 如果可以写成两个多项式 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$之积，那么，g 和 h 都必是齐次的.

证明　用反证法．假设 g 与 h 有一个是非齐次的，想法推出 f 也是非齐次的矛盾结果.

不妨假设 g 是非齐次的，将其表为齐次多项式之和．即

$$g=g_1+g_2+\cdots+g_s$$

其中g_1是最高齐次部分，g_s是最低齐次部分．于是有

$$hg=hg_1+hg_2+\cdots+hg_s$$

hg_1的最高次数项一定高于 hg_s的最高次数项．这与 $f=hg$ 是齐次多项式矛盾．故 g，h 必都是齐次多项式.

例 2　设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 F 上的 n 元多项式．证明 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 当且仅当对 F 中任一组数，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 皆有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$.

证明　必要性：因为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$，即指 f 是零多项式，也就是每项的系数都是零．故对任一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$代入 f 中皆有$f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$，

充分性：我们对未知数的个数用归纳法证明，如果我们证明了 $n=1$ 时，即一元多项式时结论成立．那么，n 元多项式可以按某一未知量的升幂排列．而把该多项式看成关于这个未知量的一元多项式．其系数是关于另外$n-1$个未知量的多项式．再利用归纳假设即可证明．我们用反证法.

当$n=1$时，即 f 是一元多项式，若$f\neq0$，其次数是一个非负整

数，故 $f(x)$ 在数域 F 上的根是有限的．这与已知条件 f 在数域 F 上有无限多个根（即对 F 中任意数 c 都有 $f(c)=0$）矛盾．故 $f(x)=0$。

假设在 $n=k-1$ 时结论成立，那么，在 $n=k$ 时，可将 $f(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k)$ 写成按 x_k 的升幂排列的形式：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)=\sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, \cdots, x_{k-1})x_k^i$$

对任意 $k-1$ 个数 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}$ 分别代入上式 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 中得到关于 x_k 的多项式：

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}, x_k) &= \sum_{i=0}^{m} f_i(c_1, \cdots, c_{k-1})x_k^i \\ &= g(x_k) \end{aligned}$$

这里 $f_i(c_1, \cdots, c_{k-1})$ 是 x_k^i 的系数．则当 $g(x_k)$ 不是零多项式时，其次数不会超过 m，又因为 $g(x_k)$ 是关于 x_k 的一元多项式，所以，它在域 F 中的根也不会超过 m．但由已知条件：对 F 中任意数 c_k 有

$$\begin{aligned} g(c_k) &= \sum_{i=0}^{m} f_i(c_1, \cdots, c_{k-1})c_k^i = f(c_1, \cdots, c_{k-1}, c_k) \\ &= 0。 \end{aligned}$$

知 $g(x_k)$ 在 F 中有无穷多根．这就产生矛盾．故 $g(x_k)$ 是零多项式．即其系数 $f_i(c_1, \cdots, c_{k-1})=0$，$(i=0, 1, 2, \cdots, m)$．如果我们注意到这里的 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}$ 是任意取的，那么立刻可知，上面证得的事实说明：对任意一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_{k-1}$，多项式 $f_i(x_1, \cdots, x_{k-1})$ 的值 $f_i(c_1, \cdots, c_{k-1})=0$，据归纳假设有

$$f_i(x_1, \cdots, x_{k-1})=0 \qquad (i=0, 1, \cdots, m)$$

于是，得

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)=\sum_{i=0}^{m} f_i(x_1, \cdots, x_{k-1})x_k^i=0．$$ 即

f 是零多项式。

例3　设

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\Sigma x_1^2+\Sigma x_1^2 x_2$$

试将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表为初等对称多项式的多项式。

解　容易看出给定的 f 恰是两个齐次对称多项式的和。我们分别把每一个齐次对称多项式用待定系数法表为初等对称多项式的多项式。

（1）设　$f_1 = \Sigma x_1^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

首项 x_1^2 的指数组为　2，0，0，…，0. 而小于（或称后于）首项指数组的所有不同的指数组只有

1，1，0，…，0。

这两个指数组分别决定

$$g_1 = \sigma_1^{2-0} = \sigma_1^2, \qquad g_2 = a\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-0} = a\sigma_2$$

故

$$f_1 = g_1 + g_2 = \sigma_1^2 + a\sigma_2.$$

为了决定系数 a，我们取 $x_1 = x_2 = 1$，$x_3 = \cdots = x_n = 0$，这时 $f_1 = 2$，$\sigma_1 = 2$，$\sigma_2 = 1$。所以 $2 = 4 + a$ 从而得 $a = -2$. 即

$$f_1 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

（2）设

$$f_2 = \Sigma x_1^3 x_2 = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} x_i^3 x_j$$

我们将首项 $x_1^3x_2$ 的指数组和小于（或称后于）首项指数组的所有不同指数组，以及由它们所决定的初等对称多项式的多项式列表表示如下：

3，1，0，…，0	$g_1 = \sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0} = \sigma_1^2\sigma_2$
2，2，0，…，0	$g_2 = a\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0} = a\sigma_2^2$
2，1，1，0，…0，	$g_3 = b\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0} = b\sigma_1\sigma_3$
1，1，1，1，0，，…0	$g_4 = c\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0} = c\sigma_4$

多项式 f_2 可以写成

$$f_2=g_1+g_2+g_3+g_4$$
$$=\sigma_1^2\sigma_2+a\sigma_2^2+b\sigma_1\sigma_3+c\sigma_4$$

为了决定系数 a，b，c 要对x_i代确定的数值，其原则是：

1. 如果要决定 a，那么把x_i代数值后，必须保证与 a 相乘的 σ_2不为零。如果要决定 b，把x_i代入数值后须使与 b 相乘的 σ_1与σ_3不为零。

2. 要使把x_i代以数值后得到的结果越简单越好。除要决定的待定系数一项外，其它项要尽量设法使其为 0 。

基于上述原则，我们在决定 a 时，取 $x_1=x_2=1$。$x_3=\cdots=x_n=0$。这时 $f_2=2$，$\sigma_1=2$，$\sigma_2=1$，$\sigma_3=\sigma_4=0$，即得 $2=4+a$。所以$a=-2$。

再取 $x_1=x_2=x_3=1$，$x_4=\cdots=x_n=0$。对于这组数 $f_2=6$，$\sigma_1=3$，$\sigma_2=3$，$\sigma_3=1$，$\sigma_4=0$。

故

$$6=27-2\times3^2+3b$$

得$b=-1$。

再取 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$，$x_5=x_6=\cdots=x_n=0$，这时，$f_2=12$，$\sigma_1=4$，$\sigma_2=6$，$\sigma_3=4$，$\sigma_4=1$。

于是

$$12=4^2\times6-2\times6^2-4\times4+c$$

得$c=4$。

从而

$$f_2=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3+4\sigma_4$$

这样，$f=f_1+f_2=\sigma_1^2+(\sigma_1^2-2)\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3+4\sigma_4$。

例 4　如果 $f(x)=x^3-x^2-4x+1$的三个根为 a_1，a_2，a_3。计算$\Sigma a_1^3a_2$的值

解　这里 $\Sigma a_1^3a_2=\sum\limits_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{3}a_i^3a_j$。由韦达公式我们知道：关于 a_1，a_2，a_3的每一个初等对称多项式都等于 $f(x)$ 的某一个系数或与某一

系数相差一符号。这样，如果我们能把对称多项式 $\Sigma a_1^3a_2$表为关于 a_1，a_2，a_3 的初等对称多项式的多项式。那么问题就解决了。

我们将首项 $a_1^3a_2$的指数组和小于（或称后于）它的所有不同指数组，以及由它们所决定的初等对称多项式列成下表：

指数组	初等对称多项式
3　1　0	$g_1=\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}=\sigma_1^2\sigma_2$
2　2　0	$g_2=a\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}=a\sigma_2^2$
2　1　1	$g_3=b\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}=b\sigma_1\sigma_3$

注意：小于首项指数组的不同指数组还有（1，1，1，1）但因 $\Sigma a_1^3a_2$ 是关于 3 个未知量的对称多项式，故把这个指数组舍去。

仿例 2 中f_2的做法可得 $a=-2$，$b=-1$。

于是

$$\Sigma a_1^3a_2=\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_3.$$

这里 $\sigma_1=1$，$\sigma_2=-4$，$\sigma_3=-1$。从而得

$$\Sigma a_1^3a_2=-35.$$

例 5　将分式

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

的分母有理化

解　我们按书中列出的五个步骤进行。

1．当取 $a=\sqrt{2}-\sqrt{3}$时，则有

$$g(x)=1+x$$

使得$g(a)$之值为原分数之分母。

2．以$a=\sqrt{2}-\sqrt{3}$为根的多项式 $f(x)=x^4-10x^2+1$。

它是这样求出的。

令

$$x=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

两边平方得

$$x^2=2-2\sqrt{2}\sqrt{3}+3$$

移项整理得

$$x^2-5=-2\sqrt{6}$$

两边再平方

$$x^4-10x^2+25=24$$

$$x^4-10x^2+1=0$$

从而知

$$f(x)=x^4-10x^2+1$$

必以$\sqrt{2}-\sqrt{3}$为根。

3．用综合除法求出以 $x-(\sqrt{2}-\sqrt{3})$除$f(x)$的商式。

$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	1	0	-10	0	1
	1	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{6}-5$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	0

商式$q(x)=x^3+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x^2-(2\sqrt{6}+5)x+\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

4．求$g(\alpha_2)g(\alpha_3)g(\alpha_4)$的值。

因为α_2，α_3，α_4是$q(x)$的根．如果能把 $g(\alpha_2)g(\alpha_3)g(\alpha_4)$表为关于 α_2，α_3，α_4 的初等对称多项式的多项式．由韦达公式．再代以 $q(x)$ 的系数即得 $g(\alpha_2)g(\alpha_3)g(\alpha_4)$的值。

事实上
$$\begin{aligned}g(\alpha_2)g(\alpha_3)g(\alpha_4)&=(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)\\&=1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4\\&\quad+\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4\\&=1+\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3'\end{aligned}$$

这里 $\sigma_1'=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\sigma_2'=\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4$，$\sigma_3'=\alpha_2\alpha_3\alpha_4$。

由韦达公式

$$\sigma_1'=-(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sigma_2'=-(2\sqrt{6}+5),$$
$$\sigma_3'=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})。$$

于是

$$\begin{aligned}g(\alpha_2)g(\alpha_3)g(\alpha_4)&=1+\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_2'\\&=-2\sqrt{2}-2\sqrt{6}-4\\&=-2(\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)\end{aligned}$$

5. 以 $-2(\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)$ 乘 $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 的分母与分子，得

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{6}+2)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{4}$$

即完成了分母有理化的工作。

这里针对无理数分母，如何确定 $g(x)$ 的构造是值得考虑的。正如讲义正文中指出的：它与 α 的选择有关。在上例中如取 $\alpha=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 时，$g(x)=x$，此时 $g(x)$ 的构造虽然变得简单了，但是以 α 为根的 $f(x)$ 将变的复杂了。因为如令

$$x=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

$$x-1=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

两边平方，得

$$x^2-2x+1=2+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}$$

$$x^2-2x-4=-2\sqrt{6}$$

两边再平方整理得

$$x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0$$

即以 $\alpha=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 为根的多项式为

$$f(x)=x^4-4x^3-4x^2+16x-8$$

这里，我们再一次看到了如何恰当的选择 α，对计算量的大小是有关系的。但无论如何，$g(x)$ 总是存在的。这只要按上面的选法，即选整个分母为 α，$g(x)=x$ 就可以了，正文中例 2 就是这样处理的。

第四章 消 元 法

【内容提要】

一 内容概述

解方程是中学代数的基本内容，在中学代数中，一方面研究一元一次、二次方程的解法和特殊高次方程的解法，同时研究了解二元和三元一次联立方程组的求解问题。当时是在方程组有解而且只有唯一解的情况下作讨论的。

但是，从实际需要来看，一次联立方程组并不只限于两个或三个未知数，而且方程的个数和未知数的个数也未必一定相等。另一方面，对于任一给定的方程组来说未必一定有解，即使有解，解的个数也未必只有一个。

本章是在中学代数解二元、三元一次联立方程组的基础上，进一步讨论一般的一次联立方程组的理论。我们这里称一次联立方程组为线性方程组。

一般线性方程组的理论包括两个基本方面：一是方程组的求解问题，二是所谓的通解结构问题。

线性方程组的求解问题包括下述三个具体问题：

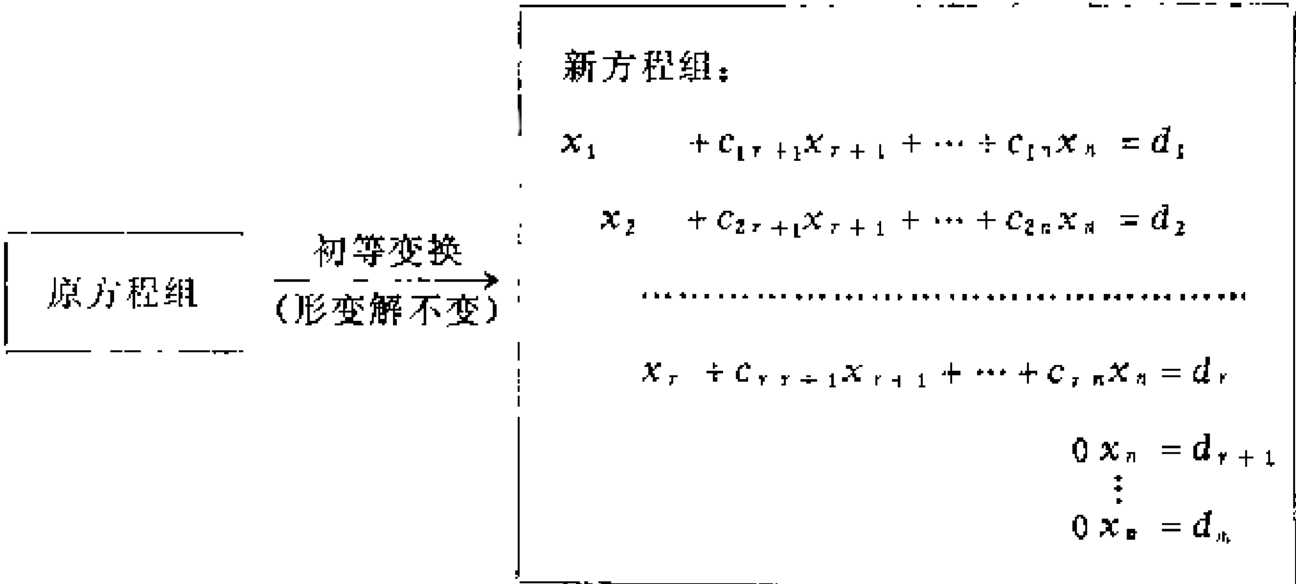
（1）线性方程组的有解条件；

（2）在有解情形下，解的个数；

（3）求全部解，我们称之为通解。

关于通解的结构问题，是在方程组有解的前提下，来研究解之间的关系问题。

本章解决上述两个方面的问题，是通过消元法将给定的线性方程组，化为同解的线性方程组给出结果：



在此同时，为了简化线性方程组的讨论，以及后面讨论的需要，我们引进了数学中一个重要的工具——矩阵，通过一般线性方程组与其表示矩阵的联系，给出了分离系数法以及矩阵相抵的若干结果。

二 内容要点

1．基本概念

线性方程组的解与通解、同解；

矩阵、系数阵与表示矩阵；

初等变换与标准形。

2．基本结论

（1）初等变换是同解变换（§1定理）；

（2）初等变换有消元作用（§2定理1）；

（1）和（2）给出了用初等变换解线性方程组的消元法。

（3）线性方程组有解的条件；解的个数；通解的形式（§2定理2）；

（4）任一$m\times n$矩阵A都可作行的初等变换化为B型阵，即与B相抵（§2定理4）；

（5）任一n阶方阵都可作行（列）的初等变换化为上（下）三角形阵（§3命题1）；

（6）任一$m\times n$矩阵可化为标准形（§3定理）：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. 基本方法

本章所介绍的基本方法是初等变换。

（1）用初等变换解线性方程组—消元法（分离系数法）；

（2）用初等变换化简矩阵：

（a）对行作初等变换化为B型阵；

（b）对行（列）作初等变换化为上（下）三角形阵；

（c）用初等变换化标准形。

三　基本要求

（1）深入领会讨论求解问题的指导思想；

（2）切实掌握解线性方程组的基本方法—消元法；

（3）熟练运用初等变换简化矩阵为：B型阵；上、下三角形阵；对角形阵，标准形阵。

【内容分析】

§1　线性方程组的同解

本节首先介绍方程组同解和初等变换的概念，进一步指出：一般线性方程组经过初等变换后，所得到的方程组与原方程组同解（本节定理）．这个定理说明：线性方程组的初等变换是同解变换．因而，由此定理即可应用初等变换将给定的线性方程组化简，化为与它同解而又易于求解的线性方程组．

下面补充说明几点问题

（1）线性方程组的讨论范围问题

本节在讨论线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (*)$$

时，给出了一个数域 F，一般地称(*)为 F 上的线性方程组．其中a_{ij}为数域 F 中的数．

求方程组（*）的解，是限定在数域 F 中去找 n 个数：$c_1, c_2, \cdots, c_n$，使 $x_1=c_1$，$x_2=c_2$，$\cdots$，$x_n=c_n$时，（*）中的每一个方程都成为等式．如果在 F 中不存在这样 n 个数，就说方程组（*）在 F 中没有解．

我们知道，一元 n（>2）次方程在数域 F 中没有根，但是有可能在 F 的扩域$\overline{F}$中有根．（扩域$\overline{F}$指的是包含 F 的数域，例如，实数域是有理数域的扩域）例如有理数域上的二次方程：

$$x^2-2=0$$

没有有理根，但是它在实数域中有根，$\pm\sqrt{2}$.

这样，自然会提出：数域F上的线性方程组（*）在F中没有解，那么它能否在F的扩域中有解呢？

关于这一问题的回答是否定的，线性方程组（*）在F中没有解，则（*）在包含F的任一扩域中也一定没有解，其论据作为一个问题，请读者到§2中去寻找答案。

（2）关于同解概念

定义1所定义的同解的概念，在两个线性方程组（含有相同未知数）无解时，认为通解相等。

（3）关于线性方程组的初等变换。

方程组的初等变换的定义，只包含两种：一是倍法变换，另一是消法变换。但是，通过若干次初等变换可以交换方程组中任二方程的次序。而且，可以证明只用消法变换，也可以交换任二方程的次序，不过其中有一个方程要差一个负号。

由此，对于线性方程组的同解变换来说，又得到一个交换任二方程次序的变换，我们称它为换法变换。

在初等变换中，应该充分注意到消法变换是一个非常重要的变换，它在化简方程组的过程中的作用，将在下一节可以看到。

（4）关于消法变换应该注意，定义要求是把第i个方程的k倍加到第j个方程上，而不是把第j个方程加到第i个方程的k倍上。

上述说法一方面不合定义的要求，另一方面，如果这种变换也算是消法变换，那么，由于k为数域F中任意数，当取$k=0$时，把第j个方程加到第i个方程的k倍上，则原方程组将化为：

$$\begin{cases}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\times(i)+(j) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad(j) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

上面的方程组的第 i 个方程与第 j 个方程相同，而且不包含原方程组的第 i 个方程．容易想象，这个方程组与原方程组一般说来是不会同解的。

这样一来，这种消法变换在解方程组中，自然没有意义．因此，从解线性方程组的角度来看，消法变换必须定义为：把第 i 个方程的 k 倍加到另一个方程上。

（5）倍法变换定义中所涉及的数 k，要求必须不等于 0．否则，如果允许 $k=0$ 时，那么用 0 乘方程组的一个方程后，所得到的方程组与原方程组显然不能同解．因此，从解线性方程组的角度来看，倍法变换必须定义为：用不等于 0 的数 k 乘方程组中的一个方程。

§ 2　线性方程组的一种解法——消元法

本节在上节的基础上给出了消元法，从而解决了线性方程组理论的第一个问题：方程组的求解问题。

定理 1 给出了解线性方程组的具体方法——消元法；定理 2 在定理 1 的基础上给出了线性方程组有解的充分必要条件、解的个数以及通解的表达式．这两个定理是本节的主要结果。

本节在后一部分，为了进一步深入研究线性方程组的理论，以及以后讨论的需要，引进了矩阵的概念．而且，通过线性方程组的表示矩阵，应用对矩阵的行作初等变换，给出了解线性方程组的分离系数法。

分离系数法的理论依据是定理3和定理 4，其中的定理3说明，以矩阵为工具通过线性方程组的表示矩阵，用矩阵的行初等变换解线性方程组的可能性；而定理 4 则提供了应用矩阵的行初等变换解线性方程组的具体作法，以后，解线性方程组，总用分离系数法去作。

下面补充说明几点问题

（1）关于矩阵定义有关的几个问题

本节与矩阵有关的定义有四个：

定义 1　矩阵的定义；

定义 2　矩阵相等的定义；

定义 3　矩阵的行初等变换的定义；

定义 4　矩阵的（行）相抵的定义。

定义 1 说明什么是矩阵。应该注意，从形式上看，矩阵就是体现一组数的位置关系的一个表，它能描述我们所讨论的对象。

在数学中刻划某些事物，有时可以用一个数，例如，可用一个实数表示实数轴上的一个点。但是，有时却不行。例如，在解析几何中，我们已经知道确定平面上的点需要两个数，而确定空间的一个点则需要三个数。

又如，确定一个一元 n 次多项式：　$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$　则需要 $n+1$ 个数，确定一个含 n 个未知数、m 个方程的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

则需要 $m\times(n+1)$ 个数。

确定一个 n 元线性方程组的解则需要 n 个数。

在上述的各例中，确定我们所研究的对象的这组数，是一个整体，分开来谈是没有意义的。

因此，矩阵实质上是对数学研究的对象的一个抽象。就特殊的具体情况来看，2×1 和 3×1 矩阵可能表示的是平面和空间的点；一个 $n\times1$ 矩阵表示的可能是一个 n 元线性方程组的解；一个 $m\times(n+1)$ 矩阵表示的可能是一个含 n 个未知数、m 个方程的线性方程组。

其次，关于两个矩阵相等的规定，首先要求 A 和 B 必须是同型矩阵，即 A 与 B 的行数和列数必须对应相等。在此前提下，　$A=B$

当且仅当A与B中对应位置的元素都相等。

由此定义，若$A=B$,则必须有：$a_{ij}=b_{ij}$，此处，a_{ij}和b_{ij}分别是A和B中的第i行第j列元素。

反之，若有$a_{ij}=b_{ij}$，则有 $A=B$。

根据矩阵相等的规定，我们在以后的讨论中，常把一组等式通过矩阵来表示。例如：

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1 \\
x_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

可表为：

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

也可把线性方程组：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

表示为：

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

这种表示方法显然简洁，尤其是，当引进矩阵的运算之后，我们将会进一步看到它的优越性。

事实上，当本节引进矩阵作为工具后，分离系数法就已说明了矩阵作为工具的效用。

定义 3 和定义 4 是就矩阵的行定义的，在下节将把它引申为

列．此处所以就行给出定义，乃是出于解线性方程组的需要．

关于矩阵的行初等变换的定义应注意之处，与线性方程组的初等变换相同，此处不再赘述．

（2）关于B型阵

定理4中所提到的B型阵是一个非常重要的特殊阵，它的形状是：有r个特殊列，每个列上只有一个1，其余元素都是0，而且这r个列的元素1，分布在不同的r个行上．另外，这个矩阵自第$r+1$行（如果存在）以后的各行元素都等于0．

一般地，考察一个阵A是不是B型阵，先看A中非0的行（元素不都等于0的行）有几个，例如是r个时；然后再看A中自第$r+1$行开始，以后各行是否都是0；最后再看A中是否存在上述的r个特殊列．

关于B型阵，更重要的是要掌握，对已知矩阵作行的初等变换化为相抵的B型阵的作法．

其具体作法是：

（Ⅰ）假定A的元素不全为0．先看A的第一行元素是否全为0，如果A的第一行元素全为0，则可对A的行作换法变换，使得A与一个第一行元素不全为0的矩阵相抵，所以化B型阵时，不妨假定A的第一行元素不全为0．

（Ⅱ） 设A的第一行中第i_1个元素$a\neq 0$，对A的第一行作倍法变换，用$\frac{1}{a}$乘A的第一行，得到：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} * & \cdots & \overset{(i_1)}{1} & \cdots & * \\ * & \cdots & b_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots\cdots & b_m & \cdots\cdots & * \end{pmatrix}=A_1$$

（Ⅲ）对A_1的行作消法变换，把A_1的第i_1列除第一个元素外，其余的元素都化为0．为此，把第一行的$-b_2$倍，$-b_3$倍，…，$-b_m$倍依次加到A_1的第2，3，…，m行上，则得到：

$$A\to A_1\to\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} & & (i_1) & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} * & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}\end{array}=A_2$$

如果A_2自第二行开始以后各行元素都为 0 时，则 A_2 已是B型阵，否则作下一步：

（Ⅳ）对A_2的后$m-1$个行重复上述（Ⅰ）～（Ⅲ）这三个步骤：从第二行中选取一个元素$b\neq 0$，设 b 在A_2的第 i_2列上，然后用$\frac{1}{b}$乘A_2的第二行，使得第二行第 i_2列元素化为 1：

$$A\to A_1\to A_2\to\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & (i_1) & & (i_2) & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} * & \cdots & 1 & \cdots & * & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & 0 & \cdots & * & \cdots & * \end{pmatrix}\end{array}=A_3$$

对A_3的行作消法变换，把i_2列除第二个元素外，其余元素都化为 0（仿（Ⅲ）去作），得到：

$$A\longrightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & (i_1) & & (i_2) & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} * & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & * \\ * & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}\end{array}=A_4.$$

若 A_4自第三行开始各行元素都为 0 时，则A_4为 B 型阵，如若不然，由于A为 $m\times n$ 矩阵，其行数是m个，所以重复上述（Ⅰ）～（Ⅲ）这三个步骤，到有限次，总能把A化成相抵的B型阵。

（3）化B型阵计算过程中应注意的一个问题

化B型阵时，为了得到特殊列上的1，在上述具体作法中，用的是倍法变换（第Ⅱ步）。由于，在$a\neq 1$时，$\frac{1}{a}$为分数，所以用$\frac{1}{a}$乘A的一个行之后，所得到的矩阵的一个行，一般来说此行的元素将会出现分数，下面的计算步骤将会因为出现分数而更加麻烦。因此，如果能通过消法变换化出1，一般情形下我们不使用倍法变换。

例如，化

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

为B型阵，为使第一行中的第一列元素化为1，可应用消法变换，将A的第二行的-1倍加到第一行上，得到：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

如果不这样作，而用$\frac{1}{2}$乘A的第一行时，则

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

继续下一步骤时，就将出现分数的计算，当然不如上面的形式方便。

有时，当一个矩阵的元素中出现分数时，则可通过倍法变换化为整数去作。

总之，不论是应用初等变换化B型阵，或是解方程组，要尽量避免复杂的计算。事实上，这种想法在所有计算中，都应该作为一种指导思想。

（4）与A相抵的B型阵的唯一性问题

由于换法变换可经过若干次行初等变换得到，所以，把B型阵的前r行中的任意两行交换位置，则所得到的仍是B型阵。例如，

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

是B型阵，当交换第一行与第二行时，得到：

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A_4$$

显然，A_2也是B型阵。

所以，当A与B型阵A_1相抵时，也必与A_4相抵。由此可知，与A相抵的B型阵不只一个。

（5）分离系数法的具体解题步骤

（a） 先写出给定的线性方程组的表示矩阵；

（b） 对表示矩阵的行作初等变换，把系数阵的部分（即表示矩阵的前n个列）化为B型阵；

（c） 根据定理2指出：

1）方程组是否有解；

2）如果有解，指出解的个数；

3）写出通解的表达式（在有无穷多个解时）或给出具体的解（在有唯一解时）。

§3 矩阵在初等变换下的标准形

为了解线性方程组，上节讨论了矩阵行的初等变换和矩阵的行

相抵的概念。本节在此基础上进一步引申，给出了矩阵列的初等变换和列相抵的概念。

关于矩阵的行相抵和列相抵，本节给出了下述结果：

（1）任一 n 阶方阵行（列）相抵于上（下）三角形方阵，即任一 n 阶方阵都可连续作若干次行（列）的初等变换化为上（下）三角形方阵（命题 2）；

（2）任一 n 阶方阵都可连续作若干次行（列）的消法变换化为上（下）三角形 n 阶方阵；

（3）任一 $m\times n$ 矩阵都与标准形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

相抵。

下面补充说明几点问题

（1）A 相抵的标准形矩阵的唯一性问题

本节定理给出：任一$m\times n$ 矩阵A都相抵于标准形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

这个定理的证明是在 § 2 定理 3 的基础上作的。由于与 A 相抵的 B 型阵不是唯一的，自然会想到，A 相抵的标准形矩阵的唯一性问题。在以后可以证明：A 相抵的标准形矩阵只有一个。

（2）关于分类

分类是研究集合（任何一些没有重复的事物的总体）的一种方法，把一个集合分成若干子集，通过子集的性质去推测集合整体的性质。什么叫集合的分类呢！粗略地说，设 A 为一个集合。$A_1,A_2,$

…，A_m，…是A的一组子集，用记号：

$$\Sigma=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m,\ \cdots\}$$

表示．如果Σ满足：

（a） 每个子集A_i不是空集（即A_i一定含有A中的元素）；

（b） 任意两个子集A_i和A_j不含公共元素，亦即，A_i中的每个元素不能含在A_j中，A_j中的每个元素也不含在A_i中；

（c） 把每个子集A_i（$i=1,\ 2,\ \cdots$）中的元素合起来恰为集合A的所有元素；

则称$\Sigma=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m,\ \cdots\}$是集合$A$的一个分类，每个子集$A_i$叫做在此分类$\Sigma$之下的一个类。

下面来看两个例子。

例1　令$F_{m\times n}$是数域F上全体$m\times n$矩阵的集合。

设　$\overline{A}=\{F_{m\times n}$中所有与$A$相抵的矩阵$\}$，则$F_{m\times n}$的子集的集合：$\Sigma=\{\overline{A},\ \overline{B},\ \cdots\}$就是$F_{m\times n}$的一个分类。

事实上，由于$A\to A$，所以Σ中每个元素$\overline{A}$都不空，即(a)成立；

由于$F_{m\times n}$的每一个矩阵A必在一个类$\overline{A}$中，（因为$A\to A$），所以所有子集$\overline{A}$，$\overline{B}$，…合起来构成$F_{m\times n}$，即(c)成立；

下面说明(b)成立．设$\overline{A}$和$\overline{B}$是两个不同的子集，如果含有公共元素C（为$F_{m\times n}$的元素），则$C\in\overline{A}$，$C\in\overline{B}$．由于$\overline{A}$中的每个元素都与A相抵，$\overline{B}$中的每个元素都与B相抵，所以有

$$A\to C,\qquad B\to C$$

由相抵的对称性有：$C\to B$，再由相抵的传递性，即有：$A\to B$．于是，对于$\overline{B}$中的任一元素X，$B\to X$，由$A\to B$，则有$A\to X$．上面事实说明，$\overline{B}$中的每个元素都与A相抵，所以$\overline{B}$中的所有的元素都应该在$\overline{A}$中．同理，由$A\to C$，有$C\to A$，再由$B\to C$，则有$B\to A$．

若令Y为A中任意元素，则有：$A\to Y$、由$B\to A$，即得：$B\to Y$．

由此可知，$\overline{A}$中的每个元素都与B相抵，因此，$\overline{A}$中的所有元素也都含在$\overline{B}$中，从而有$\overline{A}=\overline{B}$，与$\overline{A}$和$\overline{B}$是两个不同的子集相矛盾。

所以，Σ中任二不同的子集没有公共元素，于是 (b)成立。

总此，可以看出 $\Sigma=\{\overline{A},\ \overline{B},\ \cdots\}$是 $F_{m\times n}$的一个分类。

上面的分类，是就 $F_{m\times n}$ 中两个元素是否相抵作的。以后在第七章中还将接触到矩阵的其它分类。

下面再来看一个例子。

例 2　令Z是整数集，作Z的子集如下：

$Z_0=\{4m|m$为任意整数$\}$；

$Z_1=\{4m+1|m$为任意整数$\}$；

$Z_2=\{4m+2|m$ 为任意整数$\}$；

$Z_3=\{4m+3|m$ 为任意整数$\}$。

Z的上述四个子集，其实是按着用 4 除所有整数，余数相同的整数放在一起构成的。于是，$\Sigma=\{Z_0,\ Z_1,\ Z_2,\ Z_3\}$ 是整数集Z的一个分类。

（a）　每个 $Z_i(i=0,1,2,3)$显然是非空的；

（b）　Σ中任意两个元素Z_i和Z_j 不含公共元素；

（c）　任一整数必在某一子集 Z_i中，所以Z_0，Z_1，Z_2，Z_3，合起来即得到整数集Z。

由此可知，Σ是整数集Z的一个分类。

从上述两个例子可以看出，凡属于同一类的元素都具有同一性质，而在不同的类中的元素具有着不同的性质。从另一个方面去看，凡在同一类的元素都有某种关系，而在不同的类的元素之间都没有这种关系。

例如，就例 1 来看，属于同一个类的两个矩阵有相抵的关系，不在同一类的元素必不相抵；就例 2 来看，属于同一类的任意二整数之差必为 4 整除，或者可以说，用 4 除余数相同（在整数论中说成为以 4 为模同余）；不在同一类的两个整数之差不能被 4 整除，

或者可以说，用4除余数不相同（也说成为：以4为模不同余）。

一般说来，集合的任何一个分类，都是利用元素之间的某种关系得到的。而能够给集合确定一个分类的是一种特殊的关系。下面就来介绍这种特殊关系。

设"～"表示集合M的元素间的一个关系，如果M中两个元素a，b符合这个关系，就记作：$a \sim b$。

如果～是M的一个关系，且具有：

（a） 反身性 对于M中任意元素a来说，$a \sim a$

（b） 对称性 若 $a \sim b$，则 $b \sim a$

（c） 传递性 若 $a \sim b$，$b \sim c$，则 $a \sim c$

就说～是集合M的一个等价关系。

可以证明：

集合M的一个等价关系决定A的一个分类。

证明

应用M的等价关系～确定A的子集：

$$\overline{a} = \{b \mid a \sim b,\ b \in M\}$$

即$\overline{a}$中的元素是由所有与a有关系的元素组成的。把这样作出的M的所有不同的子集放到一起，用Σ表示，即$\Sigma = \{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots\}$。

下面证明Σ是集合M的一个分类。

（a）对于任一子集$\overline{a}$来说，因为$a \sim a$，所以a在$\overline{a}$中，即Σ中的每个$\overline{a}$都不是空集；

（b）若$\overline{a} \neq \overline{b}$，去证$\overline{a}$与$\overline{b}$不含公共元素。

假定c是$\overline{a}$与$\overline{b}$的公共元素，即$\overline{a} \ni c$， $\overline{b} \ni c$。故有 $a \sim c$，$b \sim c$。

因为～是等价关系，所以，由 $b \sim c$ 有$c \sim b$从而由$a \sim c$可以得到：$a \sim b$。

令x为$\overline{b}$中任意元素，则有：$b \sim x$。由 $a \sim b$，则有 $a \sim x$（因～有传递性）。

上述结果说明，$\overline{b}$中每个元素x都与a有关系，所以按着上面子集的分法，则有 $x\in\overline{a}$，即$\overline{b}$中的所有元素都在$\overline{a}$中。

同理可证，$\overline{a}$中的所有元素也都在$\overline{b}$中。于是得到$\overline{a}=\overline{b}$，这与前边的假定相矛盾。所以$\overline{a}$与$\overline{b}$不能含公共元素。

（c） 因为M中的每个元素a都属于Σ中子集$\overline{a}$，所以Σ中所有子集合起来即得到集合M。

这样，就证明了上述的命题。

由这个命题可以看出，在本节定义了矩阵的相抵关系之后，为什么又进一步推证了相抵关系是等价关系。因为，只有在得知相抵关系是等价关系，才可按着矩阵是否相抵进行分类。类似的作法，在以后的讨论中还会再次出现。

（3）关于矩阵A与其相抵矩阵B之间的表法

上节和本节我们约定用$D_i(k)$表示倍法变换，用$P_{ij}(k)$表示消法变换，用$C[i, j]$表示换法变换。

如果作的是行的初等变换，就把符号写在联结二矩阵的箭头：$\longrightarrow$的上方，如果作的是列的初等变换，则把符号写在$\longrightarrow$的下方。

需要提出的是，消法变换$P_{ij}(k)$表示行的消法变换时，其作用是把矩阵的第j行的k倍加到第i行上；如果$P_{ij}(k)$表示列的消法变换时，其作用是把矩阵的第i列的k倍加到第j列上，请读者一定要注意这个同一符号在不同情况下的作用，千万不能混为一谈。

这样，有人可能会提出异议，为什么要自找麻烦，用相同的符号表示相同的作用岂不更好？！关于这一点在第八章我们将会看到，当引进矩阵的乘法运算之后，我们将用符号$P_{ij}(k)$表示一个特殊的n阶方阵，把它从左边乘A，按着矩阵乘法的规定乘出的结果，刚好等于对A的行作消法变换$P_{ij}(k)$；把$P_{ij}(k)$从右边乘A，按着矩阵乘法的规定乘出的结果，刚好等于对A的列作消法变换$P_{ij}(k)$：把第i列的k倍加到第j列上。也正因为如此，在表示二

阵相抵的关系上，我们采取了下面的表示方法：

对矩阵A的行作消法变换$P_{ij}(k)$得到矩阵B时，为

$A \xrightarrow{P_{ij}(k)} B$，或 $B = P_{ij}(k)A$

对行作倍法变换$D_i(k)$时，为

$A \xrightarrow{D_i(k)} B$，或 $B = D_i(k)A$

对行作换法变换$C[i, j]$时，为

$A \xrightarrow{C[i,j]} B$，或 $B = C[i, j]A$

对矩阵的列作消法变换 $P_{ij}(k)$时，为，

$A \xrightarrow[P_{ij}(k)]{} B$，或 $B = AP_{ij}(k)$

对矩阵的列作倍法变换$D_i(k)$时，为

$A \xrightarrow[D_i(k)]{} B$，或 $B = AD_i(k)$

对矩阵的列作换法变换$C[i, j]$ 时，为

$A \xrightarrow[C[i,j]]{} B$，或 $B = AC[i, j]$

当连续作若干次初等变换时，则把表示初等变换的符号写到一起，例如：

$A \xrightarrow{P_{ij}(k_1)} B \xrightarrow{D_i(k_2)} C \xrightarrow[P_{lm}(k_3)]{} D$，可表示为：

$A \xrightarrow[P_{lm}(k_3)]{P_{ij}(k_1)D_i(k_2)} D$ 或

$D = (D_i(k_2)P_{ij}(k_1)A)P_{lm}(k_3)$

在上面的写法下，稍微细心一点不难发现：

$A \xrightarrow[P_{lm}(k_3)]{} B_1 \xrightarrow{P_{ij}(k_1)} C_1 \xrightarrow{D_i(k_2)} D_1$

可写为：

$$A\xrightarrow[P_{tm}(k_3)]{P_{ij}(k_1)D_s(k_2)}D_1 \quad 或 \quad D_1=D_s(k_2)P_{ij}(k_1)[AP_{tm}(k_3)]$$

如果D和D_1不相等，那么上面的表示方法就将失掉意义。但是以后可以证明D和D_1一定相等，所以上述的写法是有意义的。因此，姑且先采用这个记法。对于上面等式的写法来说，也是有意义的。以后也可证明：

$$D_s(k_2)P_{ij}(k_1)AP_{tm}(k_3)$$

任意打括号所得的结果都相同。

【例题选解】

例1 化

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

为标准形矩阵，并把所得到的标准形矩阵与A用等号连结起来。

解

$$A\xrightarrow{P_{12}(-1)}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(3),P_{31}(4)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & 6 \\ 0 & -18 & 8 & 13 \end{pmatrix}\xrightarrow[P_{12}(-6)]{}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & 6 \\ 0 & -18 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_1(-1)P_{32}(-2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[D_2\left(-\frac{1}{9}\right)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[P_{23}(-4),P_{24}(-6)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C[3,4]} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

于是与 A 相抵的标准形阵是：

八

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

二者的关系为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{32}(-2)D_1(-1)P_{31}(4)P_{21}(3)$$

$$P_{12}(-1)AP_{12}(-6)D_2\left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$P_{23}(-4)P_{24}(-6)C[3,\ 4]$$

例 2　对行作初等变换化

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

为上三角形阵。

解

$$A \xrightarrow{P_{12}(-1)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(3),\,P_{31}(4)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & -18 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-2)} \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 3　确定 λ 的值使线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases} \quad (1)$$

有解。

解 用分离系数法。

（Ⅰ）先写出方程组（1）的表示矩阵$\overline{A}$，然后对$\overline{A}$的行作初等变换，使$\overline{A}$的前4列的部分（即方程组（1）的系数阵的元素）化为B型阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1&1&1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{12}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&-3&-1\\1&2&-1&4&2\\1&7&-4&11&\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-1),\ P_{31}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&-3&-1\\0&5&-3&7&3\\0&10&-6&14&\lambda+1\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix}1&-3&2&-3&-1\\0&5&-3&7&3\\0&0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix}\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{5}\right),\ P_{12}(3)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&-\frac{3}{5}&\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\\0&0&0&0&\lambda-5\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）应用本章§2定理2可知，线性方程组（1）有解的充分必要条件是：

$\lambda-5=0$，即 $\lambda=5$

当$\lambda=5$时，方程组（1）有无穷多个解，通解的表达式为：

第五章　行　列　式

【内容提要】

一　内容概述

上一章的消元法虽然已经基本上解决了线性方程组的求解问题，但是应用消元法解线性方程组时，所求得的解与方程组系数的关系不够具体、明确，而且在决定线性方程组的解的个数时，所出现的那个关键数 r，也看不出它与方程组的系数有何必然的联系。

本章为了解决上面所提出的问题，进一步引进行列式，去探讨线性方程组的理论。

行列式在数学中有着重要的作用，在本课的后继部分是一个有力的工具。

本章共分五节，前四节从二、三阶行列式入手，导出一般 n 阶行列式的概念。然后进一步讨论行列式的基本性质和计算，§5介绍矩阵的秩数概念。在下一章我们将应用行列式的理论去解决上面所提出的两个问题。

二　内容要点

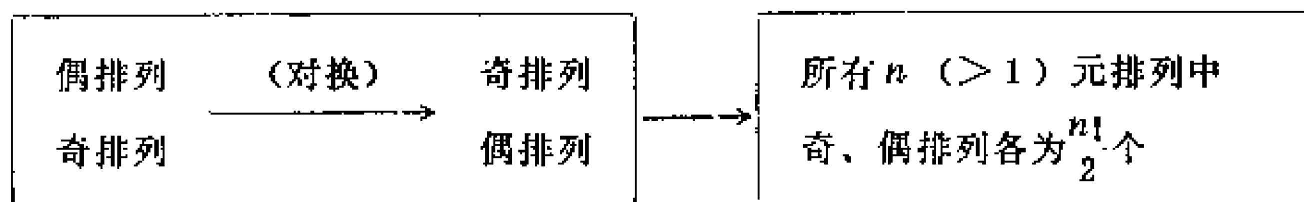
1　基本概念

排列的反序数；奇、偶排列与对换；

方阵的行列式；
子式、余子式与代数余子式；
矩阵的秩与基础子式。

2　基本结论

（1）对换改变排列的奇偶性



（2）行列式的基本性质

（a）　$\det A' = \det A$

（b）单行（列）可加性：

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2\cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ b_1\, b_2\cdots b_n \\ \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots \\ c_1\ \ c_2\cdots c_n \\ \cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & b_1+c_1 & \\ \cdots & b_2+c_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_n+c_n & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & b_1 & \\ \cdots & b_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ & b_n & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & c_1 & \\ \cdots & c_2 & \cdots \\ & \vdots & \\ & c_n & \end{vmatrix}$$

（c）换行（列）变号性：

$$\begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ b_1\cdots b_n \\ \cdots\cdots \\ c_1\cdots c_n \\ \cdots\cdots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \cdots\cdots \\ c_1\cdots c_n \\ \cdots\cdots \\ b_1\cdots b_n \\ \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & b_1 & & c_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & b_n & & c_n & \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & c_1 & & b_1 & \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & c_n & & b_n & \end{vmatrix}$$

（ *d* ）消法变换不变性：

$$\det(P_{ij}(k)A)=\det A,\quad \det(A\ P_{ij}(k))=\det\ A$$

（ *e* ）倍法变换增倍性：

$$\det(D_i(k)A)=k(\det A),\quad (\det AD_i(k))=k(\det A)$$

（3）行列式的展开

（ *a* ） $$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$
$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$
$$(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

（ *b* ） $$\left.\begin{array}{l} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \\ a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \end{array}\right\} \quad (i\neq j)$$

（c）行列式按 k 行展开——拉普拉斯（Laplace）定理。

（4）矩阵的相抵与秩

（ *a* ） A 与 B 相抵必要而且只要 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} B$

（ *b* ） $\operatorname{rank} A=r$ 必要而且只要 A 的标准形阵的对角线上有 r 个 1：

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}\quad (r\text{ 个})$$

（c）初等变换不变矩阵的秩。

3　基本方法

本章的基本方法是初等变换.

（Ⅰ）应用初等变换计算行列式的值

根据行列式的基本性质化行列式为三角形行列式

（Ⅱ）应用初等变换求矩阵的秩.

三　基本要求

1　掌握上述的基本概念、基本结论、基本方法；

2　能应用初等变换和行列式的基本性质，熟练地计算行列式的值；

3　能应用初等变换求矩阵的秩数和基础子式.

4　要着重领会从矩阵到数值（行列式、子式与秩）的意义，以及初等变换（着重是消法变换）对方阵的行列式与矩阵的秩数的影响——形变值不变（行列式）、形变秩不变（矩阵），进一步能对不变量的思想有所了解.

【内容分析】

§1　二、三阶行列式

本节从解二、三元线性方程组入手，给出了用系数组成的某种特殊的代数和去表示的求解公式. 可是这个求解公式，如果就代数和本身去记忆是比较困难的. 但是，当我们引进二、三阶行列式的定义之后，求解公式就容易掌握了，这个结果就是命题 1.

以下补充说明几点问题

（1）二、三阶行列式的定义.

$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做二阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

的行列式，记作：

$$\det A \text{或} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{代数和}\triangle = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

叫做三阶方阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

的三阶行列式，记作：

$$\det B \text{或} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

（2）二、三阶行列式的共同属性。

（a）2＝2！（6＝3！）项的代数和；

（b）代数和 D（Δ）的项是位于二阶方阵 A（三阶方阵 B）的既不同行、又不同列的两（三）个元素的乘积，而且所有这样的乘积都是它的项，项的一般形式是：

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\ (a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3})$$

其中 j_1j_2（$i_1i_2i_3$）是 1，2（1，2，3）的任一排列，此处要注意到，这种表示法的特点是：各元素的行下标按自然次序排列；

（c）把行下标按自然次序排列后，列下标的排列是偶排列时，该项前边符号为＋，列下标的排列是奇排列时，该项前边的符号为－。

此处为叙述方便，引用了奇、偶排列的称呼，由此可以看出研

究的目的性。

（3）要注意二、三阶行列式与二、三阶方阵的区别与联系。

（a）行列式与方阵不能混为一谈，本质的区别是行列式为数域F中的一个数，而矩阵是体现一些数的位置关系的一个表，从表示符号上看，行列式用的两个竖直线段，而矩阵用的是两个弧线；

（b）每个二（三）阶方阵都确定唯一一个二(三)阶行列式。

（4）计算二、三阶行列式按对角线法则作。

§2 排列的奇偶性

为了引进n阶行列式的定义，揭示行列式中各项符号的规律，本节讨论n元排列的奇偶性。先介绍了排列的反序数以及奇、偶排列的定义，然后在本节最后给出了一个重要结论：

所有n（>1）元排列中，奇、偶排列各有$\frac{n!}{2}$个。（命题2）

在证明命题2之前，本节对排列先证明了一个重要性质：

n元排列经过一次对换后改变奇偶性（命题1推论2）

为了给出确定行列式中项的符号的另一方法，本节给出了命题3。

推论2和命题3这两个结论很重要，应该记住。由于以后确定行列式中项的符号时，需要计算排列的反序数，要求读者能熟练地掌握反序数的计算方法。

以下补充说明几点问题

（1）如何具体计算一个排列的反序数。

由定义1知道，n元排列$i_1 i_2\cdots i_n$的反序数$\tau[i_1 i_2\cdots i_n]$，等于排列中在各个数码之前大于该数码的数码个数之和。所以，计算$\tau[i_1 i_2\cdots i_n]$时，先看排在1之前的数码个数，设它为m_1时，然后划去1；这样一来，在排列$i_1 i_2\cdots i_n$中划去1之后，排在2之前的数码都比2大，设它有m_2个，然后划去2；再计算一下排在3

之前的数码的个数，设为 m_3，然后划去 3，继续作下去，则可知，$\tau[i_1 i_2 \cdots i_n] = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$。

（2）在自然数 1, 2, …, n 中大于 $k(\leqslant n)$ 的自然数的个数有 $n-k$ 个。所以在排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中排在 k 之前大于 k 的数码有 m_k 个时，则排在 k 之后大于 k 的数码的个数等于 $(n-k)-m_k$ 个。

§3　n 阶行列式

本节在上两节的基础上，概括了二、三阶行列式的共同属性，给出了 n 阶行列式的定义：

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

此处，和号 $\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n}$ 表示对所有 n 元排列取和。

由于 n 元排列共有 $n!$ 个，其中奇、偶排列在 $n>1$ 时，各为 $\frac{n!}{2}$ 个，所以从上述定义可以看出，n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和；其中每一项由 n 阶方阵 A 的 n 个既不同行又不同列的元素之积构成，而且所有这样的积都是 n 阶行列式 $\det A$ 的项；项 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 的符号由排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的奇偶性确定，即符号取 $(-1)^{\tau[i_1 i_2 \cdots i_n]}$。由于 n 元排列中奇、偶排列各为 $\frac{n!}{2}$ 个，所以可知，$\det A$ 中符号取 + 和 − 的项各占 $\frac{n!}{2}$ 个。

对于给定的 n 阶方阵的行列式，一般来说，总是要求计算其值，但是 n 阶行列式共有 $n!$ 项，而 $n!$ 即使 n 不是一个很大的自

然数，它的值也是很大的，例如$10!=3628800$。所以，直接由定义列出行列式的所有项，然后计算各项的代数和，一般来说是很困难的，甚至是不可能的。本节在定义之后给了两个特殊类型n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$ （下三角形行列式之值也等于对角线上n个元素之积）；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \times \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上述的第一个结果对于n阶行列式的计算来说，是很重要的。在下节将看到，任一n阶行列式都可通过消法变换化为与其值相等的三角形行列式。

上述第二个结果把一个特殊类型的n阶行列式的计算，归结为$n-1$阶行列式的计算。

这样一来，上述两个结果为计算n阶行列式的值，提供了两个切实可行的方法。而且，在下一节我们将会看到，这两种方法在行列式的计算中也是最基本的方法。

为了以后讨论的需要，本节最后对一般$m\times n$矩阵给出了子式的概念。以后将会看到，通过子式可以刻划矩阵的某些特殊性质。

以下补充说明几点问题

（1）根据行列式定义如何写出它的所有项。

因为n阶方阵A的行列式

$$\det A = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in S_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

所以只要写出所有n元排列，对应每个排列$i_1 i_2 \cdots i_n$作出

$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 取和即得到$\det A$。

例如，以$n=4$为例，4元排列共有$4!=24$个，其中，奇、偶排列各为12个。

所有偶排列为：

1 2 3 4； 1 3 4 2； 1 4 2 3；

2 1 4 3； 2 3 1 4； 2 4 3 1；

3 1 2 4； 3 2 4 1； 3 4 1 2；

4 1 3 2； 4 2 1 3； 4 3 2 1；

所有奇排列为：

1 2 4 3； 1 3 2 4； 1 4 3 2；

2 1 3 4； 2 3 4 1； 2 4 1 3；

3 1 4 2； 3 2 1 4； 3 4 2 1；

4 1 2 3； 4 2 3 1； 4 3 1 2；

于是4阶行列式等于下列24项的代数和：

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\\&+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}\\&+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\\&-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}\\&-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}\\&-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.\end{aligned}$$

（2）应用定义如何去计算行列式的值。

当行列式的阶数为2、3阶时，只须利用对角线法则将所有项写出，算出结果即可。

当阶数大于3时，如果要求应用定义计算行列式的值，一般说来，此行列式必有某些特点。这时就应该根据其特点分析行列式各项的构成情况，然后算出其值。

例如，命题1的行列式的项，除对角线上n个元素之积所构成的项之外，其余各项至少都含有一个0作为因数；命题2中的每一项至少都含有一个0作为因数；命题3中n阶行列式$\det A$的项中，

不含a_{11}的项都等于0。根据上述分析，计算这三个特殊型的行列式的值就容易了。

（3）关于矩阵的子式。

对于n阶方阵A来说，定义了A的行列式。但是，对于任意$m\times n$ 矩阵来说，谈行列式是没有意义的。于是把行列式扩展到一般矩阵上，给出了子式的概念。关于矩阵A的子式，要注意：

（a）A的k阶子式是由A的k个不同行k个不同列交叉位置的元素构成的；

（b）A的k阶子式的行与列的次序要按着在A中的次序排列；

（c）A中子式的最大阶数一定不超过$m\times n$矩阵A的行数m和列数n，即$\leqslant \min(m, n)$。

§4　行列式的性质和计算

本节讨论行列式的性质和计算，这一内容是本章的重点。本节先介绍了行列式关于行与列的对称性质：

$\det A' = \det A$（定理1）

然后对行证明了行列式的如下基本性质：

单行可加性（命题1）；

换行变号性（命题2）；

若n阶方阵A有两行相同，则$\det A = 0$（推论）；

倍法变换增倍性：$\det(D_i(k)A) = k(\det A)$ （命题3）；

消法变换不变性：$\det(P_{ij}(k)A) = \det A$（命题4）；

若A有两行成比例，则 $\det A = 0$（命题3推论）。

上述基本性质虽然是对行论述的，但由定理1可知这些性质对列来说也成立。

关于行列式，本节还给出了两个展开定理：

行列式可按任一行（列）展开；

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad （定理 2）$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \\ a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \end{array}\right\} \quad i \neq j \quad （定理 3）$$

进一步，有：

行列式可按任意k（$<n$）行（列）展开（定理 4）。

上述结论是本章的重要结果，必须熟记以便应用。

以下补充说明几点问题

（1）关于行列式的计算

行列式的计算是行列式理论中的一个重要问题。关于n阶行列式的计算，除应用定义计算，本节提供了两个基本途径：一是应用行列式展开定理将行列式展开降阶为$n-1$阶行列式去计算（多数情形是应用消法变换把方阵A化简为上节命题 3 的形式）；二是应用消法变换将n阶方阵化简为三角形阵，应用上节命题 1 的结论，算出行列式的值。

为使读者掌握行列式的计算方法，在本节中配备了适当数量的例题，通过不同类型的例题给出了计算行列式的方法，以期使读者能从中得到启发，增强解题的技巧和能力。

（2）关于倍法变换在计算行列式中的作用

本节命题 3 指出：

$$\det(D_i(k)A) = k(\det A)$$

这一性质，也可写为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

上面这种写法，关于倍法变换增倍性这一性质，还可以叙述为：

行列式中有一行有公因子 k 时，则可将 k 提到行列式符号的外边。

应用倍法变换这一性质，显然有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由此，当一个 n 阶方阵的元素出现分数时，可应用上述性质，在计算行列式过程中能使之化简为整数，从而可以简化计算。

（3）关于单行（列）可加性的说明。

这一性质明确的指出是单行（列）可加性，一定要注意单字，绝不能错误地理解为：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & b_1+y_1 & c_1+z_1 \\ a_2+x_2 & b_2+y_2 & c_2+z_2 \\ a_3+x_3 & b_3+y_3 & c_3+z_3 \end{vmatrix}$$

上面的“等式”所以是错误的，读者只须取两个具体的行列式计算一下结果，即可验证出是错误的。

§5 矩阵的秩

为了后继部分讨论的需要，本节讨论了矩阵的秩数。先证明了：

矩阵 A 经过初等变换后，非零子式的最高阶数不变(定理2′)。

然后，把矩阵 A 在初等变换下的这个“不变量”命名为矩阵 A 的秩数。

最后证明了：

两个矩阵 A 与 B 相抵，必要而且只要 A 与 B 有相同的秩数，即

$\text{rank}A=\text{rank}B$。

在下一章我们还将看到，在消元法中所出现的那个关键的数 r，就是线性方程组的系数阵的秩。

关于矩阵的秩，在以后进一步研究矩阵的理论时，还将看到它的作用。

以下补充说明几点问题

（1）零阵的秩数及基础子式

在定义中规定零阵的秩数为0，由于零阵中没有非0子式存在，而基础子式是矩阵中的不等于0的子式，所以零阵不存在基础子式。

（2）关于与A相抵的标准形阵的唯一性

第四章§3定理曾指出

任一 $m\times n$ 矩阵A都与一标准形阵相抵，当时曾提到，与A相抵的标准形阵只能有一个。

关于这一问题应用本节定理3即可得到回答。

因为标准形矩阵

$$E_r=\begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && \ddots &&& \\ &&& 1 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& \ddots\end{pmatrix}$$

的秩数等于对角线上1的个数，所以秩数相同的同型标准形阵只能有一个。于是，由本节定理3可知，与A相抵的标准形阵只有一个。

（3）计算矩阵的秩数的基本方法是初等变换，如果单纯去求矩阵的秩数，可对矩阵同时作行的初等变换和列的初等变换。

【例题选解】

例1　计算n阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

解　对D的列作消法变换：把后 $n-1$ 个列都同时加到第一列上，则

$$D=\begin{vmatrix} na+b & a & a\cdots & a \\ na+b & a+b & a\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na+b & a & a\cdots & a+b \end{vmatrix}=(na+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a\cdots & a \\ 1 & a+b & a\cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a\cdots & a+b \end{vmatrix}$$

依次将第一行的 -1 倍加到后 $n-1$ 个行上，即化为三角形行列式：

$$=(na+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=(na+b)b^{n-1}$$

计算此题也可先对行作消法变换。

例 2　计算行列式，

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix},$$

其中 a，b，c，d 全不等于 0。

解　对第 1 列、第 2 列、第 3 列、第 4 列作倍法变换，分别用 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$ 乘第 1 、2 、3 、4 列，得到

$$D=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{a} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{d} \end{vmatrix}\times abcd$$

把后三个列都加到第一列上，得：

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{d} \end{vmatrix}\times abcd=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1 & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1 & \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{d} \end{vmatrix}\times abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

对行作消法变换，把第 1 行的 -1倍依次加到第2、3、4行上，得到：

$$=abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

另解　将D表为下面的形式

$$D=\begin{vmatrix} 1+a & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+b & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+c & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1+d \end{vmatrix}$$

应用行列式的单行（列）可加性，上面的行列式等于16个行列式之和，其中有11个含相同的两个列，所以有

$$D=abcd+bcd+acd+abd+abc$$

例 3　证明：

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

解　将等式左边的行列式记作 D_n，对n作数学归纳法。

$$D_1=\begin{vmatrix} a_0 & -1 \\ a_1 & x \end{vmatrix}=a_0x+a_1$$

即 $n=1$ 时等式成立；

假定对 $n-1$ 上式成立，去证对于n等式成立。

将 D_n 按第一行展开之，有

$$D_n=a_0\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0x^n + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

上式中的n阶行列式应用归纳法假定，其值等于：$a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

所以

$$D_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

例 4　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解　把D的第一行的-1倍依次加到后$n-1$个行上，得到：

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \cdots & 0 \\ x-a_1 & 0 & a_3-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

对列作倍法变换：分别用$\frac{1}{a_1-x}$，$\frac{1}{a_2-x}$，…，$\frac{1}{a_n-x}$ 乘第1、2、…、n 列，得到

$$D = (a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1-x} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \cdots & \frac{x}{a_n-x} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

由 $\frac{a_1}{a_1-x}=1+\frac{x}{a_1-x}$，并且，把后$n-1$个列都同时加到第1列上，则上式中的行列式即化为三角形。于是得到

$$D=(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\times\left(1+\frac{x}{a_1-x}+\frac{x}{a_2-x}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{x}{a_n-x}\right)$$

或

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{a_n-x}\right)$$

另法　将n阶行列式D按第n列分为二行列式之和，并取D为D_n时，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & 0 \\ x & a_2 & x & \cdots & 0 \\ x & x & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

将上式中的第一个n阶行列式化为三角形（把第n列的-1倍依次加到前$n-1$个列上即可），把第二个行列式按最后一列展开，得到

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+(a_n-x)D_{n-1}$$

对 D_{n-1} 重复上述作法，得到：

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+x(a_1-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)+(a_n-x)(a_{n-1}-x)D_{n-2}$$

由于，$D_1=x+(a_1-x)$，所以

$$D_n=x(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_{n-1}-x)+x(a_1-x)\cdots(a_{n-2}-x)(a_n-x)+\cdots+x(a_2-x)\cdots(a_n-x)+(a_1-x)(a_2-x)\cdots(a_n-x)$$

$$= x(a_1 - x)(a_2 - x)\cdots(a_n - x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \cdots + \cdots \frac{1}{a_n - x}\right)$$

例 5　计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

解　对列作消法变换，从第二列开始，依次把第 i 列的 -1 倍加到第 $i-1$ 列上($i = 2, 3, \cdots n$)，则得到

$$D_n = \begin{vmatrix} b_1 - b_2 & b_2 - b_3 & \cdots & b_{n-1} - b_n & a_1 + b_n \\ b_1 - b_2 & b_2 - b_3 & \cdots & b_{n-1} - b_n & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 - b_2 & b_2 - b_3 & \cdots & b_{n-1} - b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

当$n > 2$时，D_n中前两列成比例，所以$D_n = 0$；

当$n = 2$时，

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 - b_2 & a_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = (b_1 - b_2)(a_2 - a_1)$$

当$n = 1$时，$D_1 = a_1 + b_1$。

例 6　解下列方程：

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

，其中$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$是两两不等的数。

解　将上面 n 阶行列式按第一行展开，可知 x^{n-1} 的系数为

$$(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_{n-1}-a_1)\cdots(a_{n-1}-a_{n-2})$$

由于 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 两两不等，所以其值不等于 0．由此可知：$f(x)=0$ 为 $n-1$ 次方程。

由于，对于每一 a_i，$i=1, 2, \cdots, n-1$ 来说，

$$f(a_i)=\begin{vmatrix} 1 & a_i & a_i^2 & \cdots & a_i^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

所以，$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 为 $f(x)=0$ 的 $n-1$ 个不同的根。

例 7　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}x_iy_j$$

其中，A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，$\sum\limits_{i,j=1}^{n}$ 表示对 $i=1, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots, n$ 取和。

解　把 Δ 按最后一列展开，则为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次式，

x_i的系数为Δ的 i 行 $n+1$ 列元素的代数余子式：

$$(-1)^{i+n+1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

把上面的 n 阶行列式用 Δ_{in+1} 表示（$i=1, 2, \cdots, n$），则$\Delta=(-1)^{n+2}\Delta_{1n+1}x_1+(-1)^{n+3}\Delta_{2n+1}x_2+\cdots+(-1)^{2n+1}\Delta_{nn+1}x_n$

其次，把Δ_{in+1}按最后一行展开之，则为 y_1，y_2，…，y_n 的一次式，而 y_j 的系数为 Δ_{in+1} 的 n 行 j 列元素的代数余子式：

$$(-1)^{n+j}\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{array}\right|$$

→不含 D 的第 i 行

↓不含 D 的第 j 列

容易看出，上面的 $n-1$ 阶行列式是 D 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij}。所以，把Δ按上面的步骤展开时，则 $x_i y_j$ 的系数为：

$$(-1)^{i+n+1}(-1)^{n+j}M_{ij}=(-1)^{2n}(-1)^{i+j+1}M_{ij}=-A_{ij}$$

所以

$$\Delta=-\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_iy_j$$

例 8　求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

的秩数，（其中，a，b，c 为实数）。

解　对A的行作消法变换：

$$A \xrightarrow{P_{12}(1),P_{13}(1)} \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = A_1$$

（1）若 $a+b+c\neq 0$ 时

$$A_1 \xrightarrow{D_1\left(\frac{1}{a+b+c}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(-1),P_{13}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-c),P_{31}(-b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & c-b & a-b \end{pmatrix}.$$

1）当 $a=b=c$ 时，可知，$\text{rank}A=1$；

2）当 $a=b=c$ 不成立时，由于

$$\begin{vmatrix} a-c & b-c \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = (a-c)(a-b)-(b-c)(c-b)$$

$$= a^2+b^2+c^2-ab-ca-bc$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

由于在 a，b，c 中至少有两个实数不相等，所以可知，这时A的秩数为 3；

（2）若 $a+b+c=0$ 时，则

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{13}(1),\ P_{23}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & a & a+b+c \\ b & c & a+b+c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

1）若 $a=b=c=0$ 时，则 $\text{rank}A=0$；

2）若 a，b，c 不全为 0 时，则

$$\begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix} = c^2 - ab = (a+b)^2 - ab \text{（因}a+b+c=0\text{）}$$

$$= \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$$

因为 a，b，c 不全为 0，而且 $a+b+c=0$，所以可知 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\neq 0$。由此可知，这时$A$的秩等于 2 。

例 9　若D_r为$m\times n$矩阵 $A=(a_{ij})$ 中前 r 行、前 r 列所组成的 r 阶子式。如果 $D_r\neq 0$，而A中所有包含 D_r 的 $r+1$ 阶子式都等于 0 时，则A的秩等于 r 。

证明　考虑 $r+1$ 阶行列式：

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} & a_{rt} \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sr} & a_{st} \end{vmatrix} \quad r<s\leqslant m,\ 1\leqslant t\leqslant n$$

上面的 $r+1$ 阶行列式 Δ_t 是 D_r 加上A的第 s 行第 t 列的元素构成的。

当$t>r$ 时，则 Δ_t 为A中含 D_r 的 $r+1$ 阶子式，由题设$\Delta_t=0$。

当 $t\leqslant r$ 时，则 Δ_t 中有两列元素相同，所以 $\Delta_t=0$。于是把Δ_t按最后一列展开之有：

$$A_{1\,r+1}a_{1t}+\cdots+A_{r\,r+1}a_{rt}+D_r a_{st}=0 \quad (*)$$

此处，$A_{1\,r+1}$，$A_{2\,r+1}$，…，$A_{r\,r+1}$，D_r 是 Δ_t 中最后一列元素在Δ_t中的代数余子式，显然它们与 t 无关。也就是说，不论 t 取1，2，…，n 中的那一个，（*）式中的表示系数 $A_{1\,r+1}$，$A_{2\,r+1}$，…，$A_{r\,r+1}$，D_r 不变。

因为 $D_r\neq 0$，所以由（*）式有：

$$a_{st}=-\frac{A_{1\,r+1}}{D_r}a_{1t}-\cdots-\frac{A_{r\,r+1}}{D_r}a_{rt}$$

而且上式对 $t=1, 2, \cdots, n$；$s=r+1, \cdots, m$都成立。

于是，用$-\frac{A_{1\,r+1}}{D_r}$，$-\frac{A_{2\,r+1}}{D_r}$，…，$-\frac{A_{r\,r-1}}{D_r}$分别乘矩阵A的前r个行同时加到A的第s行上（$s=r+1, \cdots, m$），则A的后$m-r$个行的元素都化为0，因为$D_r\neq 0$，所以可知：$rankA=r$，得证。

第六章　线性方程组的理论

【内容提要】

一　内容概述

本章在前两章的基础上，系统而且完整地解决了一般线性方程组的理论．通过方程组的系数，给出了方程组有解的判定条件（§1 定理1）和公式解法（§2 定理1及广义克莱姆法则）．最后用向量作为工具，研究线性方程组在有无穷多个解的情形下，解之间的关系（§4 定理7和定理8）．

二　内容要点

1　基本概念

n 维向量与向量空间、子空间；

n 维向量的线性组合（线性表示）与向量组的等价；

向量组的线性相关性（线性相关与线性无关）；

向量组的极大线性无关组与向量组的秩；

向量空间的基底与维数、齐次线性方程组的解空间与基础解系．

2　基本结论

（1）线性方程组有解的判定条件（§1 定理1）与解的个数

（§1定理2）；

（2）线性方程组的公式解（§2定理1）

（3）向量组的线性相关性

（a）$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$（·）线性相关（$s>1$）必要而且只要，在向量组（·）中至少有一向量 α_i 能被其余向量线性表示（§4定理1）；

（b）向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是分量矩阵 A 的秩$< s$：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}, \alpha_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$$

$j=1, 2, \cdots, s$。（§4定理3）

（c）向量组的线性相关与齐次线性方程组的联系：$\alpha_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})$，$j=1, 2, \cdots, s$

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=\theta \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1s}k_s=0 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2s}k_s=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{ns}k_s=0 \end{cases} \quad (2)$$

存在不全为0的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使（1）成立，即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关充分必要条件是齐次线性方程组（2）有非0解：$k_1, k_2, \cdots, k_s$。

（d）具有某些特点的向量组的线性相关性：

§4例8、例9、例11。

（e）若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中含有部分向量组线性相关，则此向量组必线性相关；

（f）$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，而$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，则 β 可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示（§4定理2）。

（4）关于极大线性无关组。

（a）存在性与具体找法（§4命题1、§4定理3的推论2、

§4定理4）.

（b）向量组的每个极大线性无关组所含向量个数都相等（§4定理5）

（c）α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}是向量组α_1，α_2，…，α_s的极大线性无关组必要而且只要α_1，α_2，…，α_s的分量矩阵A中α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}所在的列有A的基础子式（§4定理4）

（5）基础解系

基础解系的存在性与所含向量的个数（§4定理7）

（6）一般线性方程组的通解表达式（§4定理8）

3　基本方法

（1）初等变换法

（a）计算矩阵的秩数；

（b）判断向量组的线性相关性（计算分量矩阵的秩数与向量个数作比较，应用§4定理3得出结论）；

（c）应用初等变换求解一般线性方程组（求非齐次线性方程组的特解，和导出齐次组的基础解系）.

（2）行列式法

（a）用行列式解一般线性方程组（克莱姆法则与广义克莱姆法则）；

（b）应用计算子式确定矩阵的秩；

（c）已知向量组的分量矩阵的秩，应用基础子式确定极大线性无关组.

三　基本要求

1　掌握向量组线性相关与线性无关的概念及其判断方法；

2　掌握向量组极大线性无关组与齐次线性方程组的基础解系的概念及其求法；

3　能熟练地运用初等变换法求解线性方程组（判定是否有解

以及解的个数，用向量形式给出一般解的表达式）；

4　掌握克莱姆法则（包括广义克莱姆法则）能用行列式法解线性方程组；

5　了解解决一般线性方程组理论的基本想法；

6　掌握本章中基本结论的证明方法。

【内容分析】

§ 1　线性方程组的有解条件

本节应用矩阵的秩数给出了一般线性方程组有解的条件，以及解的个数（定理 1 和定理 2）

在此基础上，进一步对两个特殊线性方程组给了两个结论：

含 n 个未知数、n 个方程的线性方程组有唯一解的充分必要条件是：系数行列式不等于 0 （推论 1）

含 n 个未知数、n 个方程的齐次线性方程组有非 0 解的充分必要条件是：其系数行列式等于 0；齐次线性方程组当方程个数<未知数个数时，必有非 0 解（推论 2）。

本节这几个结果很重要，要求牢记。

以下补充说明几点问题

（1）关于矩阵秩数的一个性质

在导出定理 1 之前的讨论中，曾用到矩阵如下的一个性质：

在 $m\times n$ 矩阵 A 的第 n 列之后再添加一个列，所得到的矩阵为 $\overline{A}$ 时，则关于 A 和 $\overline{A}$ 的秩数有下面的结论：

（a）或者 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}\overline{A}$

（b）或者 $\operatorname{rank}\overline{A}=\operatorname{rank}A+1$

这是因为，当 $\operatorname{rank}\overline{A}\neq\operatorname{rank}A$ 时，则必有：

$$\operatorname{rank}\overline{A}\geqslant r+1,\quad (\text{设}\operatorname{rank}A=r)$$

另一方面，对于$\overline{A}$中任一 $r+2$ 阶子式（如果存在）来说，必为下列两种情形之一：

1）不包含所添加的列；

2）包含所添加的列。

前一情形，此$r+2$阶子式为矩阵 A 的$r+2$阶子式，所以必为 0；后一情形，此 $r+2$ 阶子式按最后一列展开之，可表为 A 的（$r+2$ 个）$r+1$ 阶子式的代数和（前边带有系数），由于 $\operatorname{rank} A=r$ 时，A中所有 $r+1$ 阶子式必为 0，从而$\overline{A}$ 的这个 $r+2$ 阶子式等于 0。

由此可知：$\operatorname{rank}\overline{A}=r+1$，即 $\operatorname{rank}\overline{A}=\operatorname{rank}A+1$。

（2）关于线性方程组的系数阵A和表示矩阵$\overline{A}$的秩数的计算。

由于$\overline{A}$的前n个列即为A的n个列，所以对$\overline{A}$的行作初等变换后所得的矩阵为$\overline{B}$时，则$\overline{B}$的前n个列即为$\overline{A}$的前n个列作行初等变换所得到的。因此，由$\overline{B}$的前n列所构成的矩阵的秩，即为A的秩，$\overline{B}$的秩为$\overline{A}$的秩。

因此，求系数阵A和表示矩阵$\overline{A}$的秩数时，可以只对$\overline{A}$的行作初等变换，即可同时求出。

一般情形下，如果只要求去求A和$\overline{A}$的秩数，只要不把最后一列的倍数加到前n列上去，对$\overline{A}$的列作初等变换后所得到的矩阵$\overline{B}$的前n个列，即为$\overline{A}$的前n列作初等变换后的结果。所以，在求A和$\overline{A}$的秩数时，对列作初等变换也可以（这时不准许把第 $n+1$ 列的倍数加到前n列上）。

由于矩阵的秩数作初等变换后不变，所以对$\overline{A}$的行、列可同时作初等变换（只要作列的消法变换时，不把最后一列的倍数加到前n个列上），就着最后所得到的矩阵$\overline{B}$的前n个列和$\overline{B}$本身的秩数，即可同时求得A和$\overline{A}$的秩数。

§ 2 线性方程组的公式解——克莱姆法则

上一节已经解决了一般线性方程组的求解问题，为了把线性方程组的解通过给定线性方程组的系数和常数项表示出来，本节应用行列式作为工具，给出了线性方程组的公式解法。

先就特殊情形，即未知数个数等于方程个数的方程组，在系数阵的行列式不等于 0 的情形下，给出了公式解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

当 $D=\det A\neq 0$ 时，（1）有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

其中 D是（1）的系数阵A的行列式，D_j为用（1）的常数项作列替换D的第 j 列所得到的n阶行列式。（定理 1 克莱姆法则）

其后，在此基础上定义了克莱姆型方程组的概念，给出了克莱姆型方程组的公式解法。

最后，证明了：

线性方程组的秩为 r 时，则此线性方程组的系数阵的基础子式（即不为 0 的 r 阶子式）所在的 r 个方程是克莱姆型方程组，而且与原方程组同解（定理 2）。

由此得出用（广义的）克莱姆法则对一般线性方程组给出的公式解法。

以下补充说明几点问题

（1）广义克莱姆法则解线性方程组的具体步骤。

（a）写出线性方程组的表示矩阵，然后应用初等变换求出系数阵A和表示矩阵$\overline{A}$的秩数，

如果 $\text{rank}A=\text{rank}\overline{A}$ 则方程组有解，继续作下一步。否则，到此结束。

（b）在 $\text{rank}A=\text{rank}\overline{A}=r$ 的情形下，在系数阵 A 中找一个基础子式，即在 A 中找一个不等于 0 的 r 阶子式 D。然后写出 D 所在的 r 个方程，即与原方程组同解的克莱姆型方程组。

（c）把克莱姆型方程组中 D 所在的 r 个列所决定的未知数确定下来，然后把其余的 $n-r$ 个未知数取为参数，移到等号右端作为常数项，应用克莱姆法则解出之。

（2）用克莱姆法则解特殊线性方程组比较方便，如果，不作特殊要求，一般情况下总是用消元法（对表示矩阵的行作初等变换）解线性方程组。克莱姆法则的作用，一方面说明解与系数、常数项的联系，另一方面在论证问题方面有很重要的作用。

§3—§4 线性方程组解之间的关系，n维向量的线性相关性与基础解系

第三节首先证明了齐次线性方程组的一个重要性质：

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是齐次线性方程组的 s 个解，这 s 个解的任一线性组合：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是数域 F 中任意数，

都是该齐次线性方程组的解（命题 1 推论）。

齐次线性方程组的这一特有的性质，为我们提供了一个宝贵的启示：能否求出齐次线性方程组的一组有限个解：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 使得这 s 个解能生出齐次线性方程组的所有解。如果可能，那么用这 s 个解，把齐次线性方程组的所有解都可确定出来。

关于非齐次线性方程组，本节给出了下述结果：

若 γ_0 是非齐次线性方程组（1）的一个取定的解，当 α 取遍（1）的导出齐次组的所有解时，则所有的 $\gamma_0+\alpha$ 即为（1）的所

有解（命题2推论）。

由此结果可以看出，如果掌握了导出齐次方程组的通解，则非齐次线性方程组的通解也就清楚了。

正因为如此，所以研究关于一般线性方程组解之间的关系，重点就放到齐次线性方程组上。

第四节为了解决线性方程组的解之间的关系，先定义了 n 维向量，然后引进了向量空间和子空间的概念，并且作为例子指出：齐次线性方程组的所有解的集合是一个向量空间，称它为该齐次线性方程组的解空间。

为了讨论齐次线性方程组的解空间的构造，先对数域 F 上的向量空间引进了线性组合、线性相关、线性无关、极大线性无关组等概念，并进一步给出了向量空间的基底和维数概念。

从基底的概念可以看出，用它就可以生成向量空间的所有向量，而且，基底是生成向量空间时所使用的向量个数最少的一组。

由此可知，只要掌握了向量空间的一个基底，那么这个向量空间的结构就清楚了。前面提到，齐次线性方程组的所有解构成一个向量空间——解空间，所以要掌握齐次线性方程组的所有解，只须掌握齐次线性方程组的解空间的一个基底即可。

本节证明了：秩为 r 的齐次线性方程组的解空间为 $n-r$ 维的向量空间，并且给出了求基底的具体方法（§4定理7）。

在讨论中为了体现齐次线性方程组的解空间的基底的作用，我们称它为齐次线性方程组的基础解系。

最后，本节给出了一般非齐次线性方程组的解的结构定理：

若含 n 个未知数的非齐次线性方程组的秩为$r(r<n)$，γ_0是它的一个取定的解，α_1，α_2，…，α_{n-r} 是它的导出齐次组的一个基础解系。则

$\gamma_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$，$k_1$，$k_2$，…，$k_{n-r}$ 为数域 F 中的数，

是此非齐次线性方程组的通解（§4定理8）。

以下补充说明几点问题

（1）关于向量组线性相关与线性无关的定义。

开始接触线性相关、线性无关的概念时，总会有人感到这个概念不可捉摸。尤其是，对于线性无关的概念，更觉得难以理解。

那么向量组线性相关和线性无关是什么意思呢？

线性相关和线性无关这两个概念是描述向量组的性质的，是揭示向量组中向量间的关系的。这一点可以从本节定理1看出来。

定理1指出：向量组α_1，α_2，…，α_s（$s\geqslant 2$）线性相关，必要而且只要α_1，α_2，…，α_s中至少有一个向量可被其余向量线性表示。

这个定理如果用逆否命题的形式叙述时，则为：

α_1，α_2，…，α_s（$s\geqslant 2$）线性无关必要而且只要α_1，α_2，…，α_s中每一向量都不能被其余的向量线性表示。

因此，由定理1可把向量组是线性相关的理解为，向量α_1，α_2，…，α_s之间有关系——线性表示的关系（正确的说法应是：至少有一向量可被其余的向量线性表示）；向量组α_1，α_2，…，α_s（$s\geqslant 2$）线性无关，可按定理1理解为，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中各个向量间都没有关系——线性表示的关系（每个向量都不能被其余的向量线性表示）

定理1中关于向量组所含向量的个数s，限制$s\geqslant 2$。这是因为，如果不附加这个条件，对于只含一个向量的特殊向量组来说，α_1可被其余向量线性表示是没有意义的。

（2）关于定理2

定理2指出：若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，添加向量$\beta$后，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$线性相关，则$\beta$可被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示。

换个说法，定理2也可以说为：

α_1，α_2，…，α_s，β线性相关，如果去掉β之后，向量组α_1，α_2，…，α_s线性无关时，则β可被α_1，α_2，…，α_s线性表示。

上述的定理2在研究向量组的线性关系时，是一个很重要的结果。通常在论证问题时，说明向量β可否被线性无关的向量组α_1，α_2，…，α_s线性表示，常常采取去说明向量组α_1，α_2，…，α_s，β是否线性无关的办法。

如果，α_1，α_2，…，α_s，β线性相关，则由定理2，β可被α_1，α_2，…，α_s线性表示；

如果，α_1，α_2，…，α_s，β线性无关，则由定理1可知，β不能被α_1，α_2，…，α_s线性表示。

另一方面，本节定理1指出：α_1，α_2，…，α_s ($s\geqslant 2$) 线性相关，则至少有一个能被其余的向量线性表示。那么，到底是那一个可被其余的向量线性表示呢？

按定理2上面所指出的后一说法，如果去掉α_i以后其余的向量线性无关时，则α_i即可被其余向量线性表示。

如果去掉α_i以后，其余向量仍然线性相关，其结论如何呢？读者自己去考虑。

（3）关于定理3

定理3指出：向量组α_1，α_2，…，α_s线性相关必要而且只要（充分必要条件）α_1，α_2，…，α_s的分量矩阵A的秩$<s$。

这一定理的逆否命题的形式是：

α_1，α_2，…，α_s线性无关，必要而且只要α_1，α_2，…，α_s的分量矩阵A的秩$=s$。

这一结果为我们提供了一个切实可行，而且简便的判断向量组是否线性相关的方法。只须写出α_1，α_2，…，α_s的分量矩阵，应用初等变换计算出分量矩阵的秩数，即可断定向量组α_1，α_2，…，α_s是否线性相关。由此又一次看出矩阵的初等变换的作用。

（4）关于向量组的极大线性无关组

（a）由定理2可将向量集合S的极大无关组的定义叙述为下面的等价形式：α_1，α_2，…，$\alpha_r\in S$，如果

1）α_1，α_2，…，α_r线性无关，

2）S中任一向量β都可被$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性表示，则称$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$S$的极大线性无关组。

（b）极大线性无关组的存在性。

命题1和定理3的推论2都指出了极大线性无关组的存在性。命题1是推论2的特殊情形。

（c）极大线性无关组的求法。

本节定理4指出：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的分量矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}, \quad \alpha_j=(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}) \quad j=1, 2, \cdots, s.$$

于是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的一部份向量$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大线性无关组必要而且只要$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$所在的列上存在$A$的基础子式。

因此，求向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大无关组时，可先求出$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的分量矩阵$A$的秩数，设它为$r$时，找出$A$的一个不等于0的$r$阶子式$D$，则$D$所在的$r$个列即为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$的极大线性无关组。由此，又一次看到初等变换的作用。

（5）关于矩阵的秩数和矩阵的列（行）向量组的秩数的关系。

由本节定理4可知矩阵$A=(a_{ij})$的列向量组的秩数（即极大线性无关组所含向量的个数）等于矩阵A的秩数。

另一方面，由于$\text{rank}A=\text{rank}A'$，而$\text{rank}A'$等于$A'$的列向量组的秩，而$A'$的列向量组是$A$的行向量组，所以$\text{rank}A'=A$的行向量组的秩。

于是得到：

$\text{rank}A=A$的列向量组的秩$=A$的行向量组的秩。

（6）向量组的秩对于向量组相关性的作用。

（a）定理5保证了向量组的秩是有意义的；

（b）由于向量组的秩等于向量组的极大线性无关组中所含向量的个数，而向量组的极大线性无关组是它的一个部分向量组，所以可由向量组的秩数 r 和向量组所含向量个数 s 的关系，断定此向量组的线性相关性：

1）若 $r<s$，则向量组线性相关（定理5推论）；

2）若 $r=s$，则向量组本身即为它的极大线性无关组，故此向量组线性无关。

（7）关于定理6

定理6指出了有线性表示关系的两组向量的秩数之间的关系。由此可以得出：

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（Ⅰ）能被 $\beta_1, \cdots, \beta_t$（Ⅱ）线性表示，当 $s>t$ 时，则向量组（Ⅰ）必线性相关。

事实上，由定理6，向量组（Ⅰ）的秩数 $r_1\leqslant$ 向量组（Ⅱ）的秩数 r_2，即 $r_1\leqslant r_2$。

而 $r_1\leqslant s$，$r_2\leqslant t$，由 $s>t$，必有 $r_1<s$。

所以由本节定理5的推论，向量组必线性相关。

由此，进一步还可以看出：线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，决不能被向量个数少于 s 的向量组：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$，$(t<s)$ 线性表示。即，当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，可被 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表示时，则必有 $s\leqslant t$。事实上，这个说法是上述结果的另一种表述形式。

（8）若 S_1 和 S_2 都是向量空间，如果 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 既是 S_1 的基底又是 S_2 的基底时，则 S_1 和 S_2 相同。这一事实，由基底的定义可知它是成立的。

（9）关于向量空间的维数

由于向量空间的维数，根据定义是基底所含向量的个数。所以，不能认为 n 维向量所构成的向量空间的维数都等于 n。

事实上，只有所有 n 维向量的全体所构成的向量空间 $F^{(n)}$ 是 n 维向量空间。

例如就 $n=4$ 的情形来看，$F^{(4)}=\{$所有 4 维向量$\}$是 4 维空间。因为，$\varepsilon_1=(1,0,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1,0)$，$\varepsilon_4=(0,0,0,1)$是$F^{(4)}$的一个基底。

又如：

$S_1=\{(a,0,0,0)\mid\forall a\in F\}$是向量空间。

可知：$(1,0,0,0)\in S_1$ 而且 S_1 中每一向量都可被它线性表示。所以$(1,0,0,0)$是 S_1 的基底。于是，S_1 是 1 维空间。再如，令

$S_2=\{(0,b,0,0)\mid\forall b\in F\}$是向量空间。

而$(0,1,0,0)$是 S_2 的一个基底，所以 S_2 也是 1 维空间。

显然 S_1 和 S_2 是不相同的两个一维向量空间。

一般地，我们知道，秩为 r 的含 n 个未知数的齐次线性方程组的解空间是 $n-r$ 维的向量空间。

建议读者自己去具体找出几个由某些 5 维向量所构成的 2 维向量空间，3 维向量空间。

想一想，存不存在由某些5维向量所构成的6维空间？为什么？

(10) 关于齐次线性方程组的基础解系（即解空间的基底）

(a) 若齐次线性方程组的解空间的维数为 $n-r$ 时，则齐次线性方程组任意 $n-r$ 个线性无关的解必为解空间的基底，即齐次线性方程组的基础解系。

(b) 关于基础解系的求法

本节定理 7 的证明给出基础解系的求法如下：

1) 写出齐次线性方程组的系数阵A，然后对A的行作初等变换，化简为B型阵。为明显起见，设它为下面的形式：

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2）解以B为系数阵的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ \quad x_2 \qquad + b_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ \qquad\quad x_r + b_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + b_{rn}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0x_n = 0 \end{cases}$$

注：由于上面的齐次线性方程组，与前r个方程所构成的齐次线性方程组是同解的，所以以后为方便起见，写出以B为系数阵的齐次线性方程组时，后 $m-r$ 个方程略去不写。

求出齐次线性方程组的通解表达式为：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{1,r+1}t_{r+1} - \cdots - b_{1n}t_n \\ x_2 = -b_{2,r+1}t_{r+1} - \cdots - b_{2n}t_n \\ \qquad \vdots \\ x_r = -b_{r,r+1}t_{r+1} - \cdots - b_{rn}t_n \\ x_{r+1} = t_{r+1} \\ \qquad \vdots \\ x_n = t_n \end{cases} \qquad (*)$$

3）然后对（*）中的t_{r+1}，…，t_n依次给出$n-r$组值，使所得到的 $n-r$ 个解线性无关。

一般地，我们取下面$n-r$组值：

$$\begin{cases} t_{r+1} = 1, \ t_{r+2} = 0, \ \cdots, \ t_n = 0 \\ t_{r+1} = 0, \ t_{r+2} = 1, \ \cdots, \ t_n = 0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ t_{r+1} = 0, \ t_{r+2} = 0, \ \cdots, \ t_n = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

于是所得到的$n-r$个具体的解如下：

$$\alpha_1=(-b_{1\,r+1},\ -b_{2\,r+1},\ \cdots,\ -b_{r\,r+1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$
$$\alpha_2=(-b_{1\,r+2},\ -b_{2\,r+2},\ \cdots,\ -b_{r\,r+2},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\alpha_{n-r}=(-b_{1n},\ -b_{2n},\ \cdots,\ -b_{rn},\ \ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

显然，α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r}线性无关（因为 α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 的分量矩阵的秩数等于$n-r$）。

所以α_1，α_2，$\cdots$，α_{n-r} 即为所求的一个基础解系。

对上面所取的 $n-r$ 组值来说，并不是唯一的取法。事实上，只要对应于所取的$n-r$组值，求得的$n-r$个解是线性无关，这$n-r$组值怎样取都行。尽管如此，但是出于计算简单的要求，通常求齐次线性方程组的基础解系时，我们总选取上面（*）式的 $n-r$ 组值。

（11）关于通解

我们在第四章消元法的讨论中，给出了通解表达式：

$$\begin{cases} x_1=d_1-c_{1\,r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{1n}t_n \\ x_2=d_2-c_{2\,r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{2n}t_n \\ \quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ x_r=d_r-c_{r\,r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{rn}t_n \\ x_{r+1}=t_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n=t_n \end{cases} \tag{1}$$

在本章§4中用向量又给出了线性方程组的通解的另一表示方法：

$$\gamma_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r} \tag{2}$$

那么二者的关系如何呢？结论是：二者是一致的。

事实上，应用（1）求线性方程组的一个特殊解γ_0时，令

$$t_{r+1}=t_{r+2}=\cdots=t_n=0$$

则得到一个特殊解：$\gamma_0=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

由于把（1）中的d_1，d_2，$\cdots$，d_r都换为0时，即为原非齐次线性方程组的导出齐次组的通解表达式，所以可以利用（1）式

求出导出齐次组的一个基础解系。

取 $t_{r+1}=1,\ t_{r+2}=0,\ \cdots,\ t_n=0$

$t_{r+1}=0,\ t_{r+2}=1,\ \cdots,\ t_n=0$

$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$t_{r+1}=0,\ t_{r+2}=0,\ \cdots,\ t_n=1$

得到基础解系为：

$$\alpha_1=(-c_{1r+1},\ -c_{2r+1},\ \cdots,\ -c_{rr+1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

$$\alpha_2=(-c_{1r+2},\ -c_{2r+2},\ \cdots,\ -c_{rr+2},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-r}=(-c_{1n},\ -c_{2n},\ \cdots,\ -c_{rn},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

这时用向量表出的通解即为：

$$(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)+t_{r+1}(-c_{1r-1},$$
$$-c_{2r+1},\ \cdots,\ -c_{rr+1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$
$$+t_{r+2}(-c_{1r+2},\ -c_{2r+2},\ \cdots,\ -c_{rr+2},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)$$
$$+\cdots+t_n(-c_{1n},\ -c_{2n},\ \cdots,\ -c_{rn},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$$

应用向量的运算整理之，上式等于下面的 n 维向量：

$$(d_1-c_{1r+1}t_{r+1}-c_{1r+2}t_{r+2}-\cdots-c_{1n}t_n,\ \cdots,\ d_r-c_{rr+1}t_{r+1}$$
$$-\cdots-c_{rn}t_n;\ t_{r+1},\ \cdots,\ t_n)$$

由于上面的向量为原方程组的解，所以有，

$$\begin{cases} x_1=d_1-c_{1r+1}t_{r+1}-\cdots-c_{1n}t_n \\ \quad\vdots \\ x_r=d_r-c_{rr+1}t_{r+1}-\cdots-c_{rn}t_n \\ x_{r+1}=t_{r+1} \\ \quad\vdots \\ x_n=t_n \end{cases}$$

另一方面，（1）为原方程组的通解，所以用向量表示时，方程组的任一解为下面的形式：

$$(d_1-c_{1r+1}t_{r+1}-c_{1r+2}t_{r+2}-\cdots-c_{1n}t_n,\ d_2-c_{2r+1}t_{r+1}$$
$$-c_{2r+2}t_{r+2}-\cdots-c_{2n}t_n,\ \cdots,\ d_r-c_{rr+1}t_{r+1}-c_{rr+2}t_{r+2}$$

$-\cdots-c_{rn}t_n,\ t_{r+1},\ t_{r+2},\ \cdots,\ t_n)$

$=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)+t_{r+1}(-c_{1r+1},$

$-c_{2r+1},\ \cdots,\ -c_{rr+1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

$+t_{r+2}(-c_{1r+2},\ -c_{2r+2},\ \cdots,\ -c_{rr+2},\ 0,\ 1,\ \cdots 0)$

$+\cdots+t_n(-c_{1n},\ -c_{2n},\ \cdots,\ c_{rn},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$

$=\gamma_0+t_{r+1}\alpha_1+t_{r+2}\alpha_2+\cdots+t_n\alpha_{n-r}$

其中，$\gamma_0=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r,\ 0,\ 0,\ \cdots,0)$ 是原方程组的一个特殊解，

$\alpha_1=(-c_{1r+1},\ -c_{2r+1},\ \cdots,\ -c_{rr+1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)$

$\alpha_2=(-c_{1r+2},\ -c_{2r-2},\ \cdots,\ -c_{rr+2},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)$

$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$

$\alpha_{n-r}=(-c_{1n},\ -c_{2n},\ \cdots,\ -c_{rn},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)$

是导出齐次组的基础解系。

综合上述可知方程组的通解的两种形式是完全一致的，只不过是表出方法不同而已。

【例题选解】

例 1 判断向量组：

$\alpha_1=(1,1,\ 3,1)$，$\alpha_2=(5,-2,8,-9)$，$\alpha_3=(-1,1,-1,3)$，$\alpha_4=(1,\ 3,\ 1,\ 7)$的线性相关性。

解 应用定义，考查是否存在不全为 0 的 4 个数：k_1,k_2,k_3,k_4使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\theta \tag{1}$$

成立。

将α_1，α_2，α_3，α_4的分量代入（1）式，整理之，得到：

$(k_1+5k_2-k_3+k_4,\ k_1-2k_2+k_3+3k_4,\ 3k_1+8k_2-k_3+k_4,$

$k_1-9k_2+3k_3+7k_4)$

$=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

由向量相等得到：

$$\begin{cases} k_1+5k_2-k_3+k_4=0 \\ k_1-2k_2+k_3+3k_4=0 \\ 3k_1+8k_2-k_3+k_4=0 \\ k_1-9k_2+3k_3+7k_4=0 \end{cases} \qquad (2)$$

由于（2）的系数行列式等于0，所以（2）有非0解：k_1，k_2，k_3，k_4。从而可知α_1，α_2，α_3，α_4线性相关（因为（2）的任一解都满足（1）式）。

解法2　应用本章定理3，计算出α_1，α_2，α_3，α_4的分量矩阵的秩数，然后与向量个数比较大小。

α_1，α_2，α_3，α_4的分量矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

而$|\boldsymbol{A}|=0$，所以$\mathrm{rank}\boldsymbol{A}\leqslant 3$。故$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$，线性相关。

例2　若α，β，γ线性无关，则$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\alpha+\gamma$，也线性无关。

证明　应用定义指出：

若　$k_1(\alpha+\beta)+k_2(\beta+\gamma)+k_3(\gamma+\alpha)=0$　　　（1）

必有$k_1=0$，$k_2=0$，$k_3=0$，即可。

由向量加法和数乘向量的运算性质，将（1）整理之，得到：

$$(k_1+k_3)\alpha+(k_1+k_2)\beta+(k_2+k_3)\gamma=\theta$$

由题设α，β，γ线性无关，所以上式成立，必须：

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

解之，得到：

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

所以，$\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$线性无关。

例 3　设向量组α_1，α_2，…，α_s(Ⅰ)的秩为 r 时，则(Ⅰ)中任意 r 个线性无关向量组α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}必为（Ⅰ)的极大线性无关组。

证明　只须证明：（Ⅰ）中任取一个向量α_j，

$$\alpha_{i_1},\ \alpha_{i_2},\ \cdots,\ \alpha_{i_r},\ \alpha_j \qquad (1)$$

线性相关即可。

因为（Ⅰ）的秩为 r，所以（Ⅰ）必有一极大线性无关组含 r 个向量，设为：

$$\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \cdots,\ \alpha'_r \qquad (2)$$

则根据极大线性无关组的性质，向量组(1)可被向量组（2）线性表示。而（1）的个数大于(2)的向量个数，所以由本章§4补充说明(7)，则 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r},α_j 线性相关。即得，α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r}是向量组（Ⅰ）的极大线性无关组。

例 4　设向量组α_1，α_2，…，α_s（Ⅰ）和向量组 β_1，β_2，…，β_t（Ⅱ）的秩分别为r_1和 r_2 时，证明：向量组：α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_t（Ⅲ）

的秩 r 满足条件：

$$\max(r_1,\ r_2)\leqslant r\leqslant r_1+r_2$$

证明　令向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）的极大线性无关组分别为：

$$\alpha_{i_1},\ \cdots,\ \alpha_{i_{r_1}} \quad 和 \quad \beta_{j_1},\ \cdots,\ \beta_{j_{r_2}}$$

显然向量组（Ⅲ）能被向量组：

$$\alpha_{i_1},\ \cdots,\ \alpha_{i_{r_1}},\ \beta_{j_1},\ \cdots,\ \beta_{j_{r_2}} \quad (Ⅳ)$$

线性表示。

根据本章§4定理6，则

（Ⅲ）的秩$\leqslant$（Ⅳ）的秩$\leqslant r_1+r_2$

另一方面，$r\geqslant\max(r_1,r_2)$ 是显然的。

例 5　令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1s} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2s} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{ms} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots b_{1t} \\ b_{21} & b_{22}\cdots b_{2t} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots \\ b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mt} \end{pmatrix}$$

的秩分别为r_1和 r_2，

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1s} & b_{11} & b_{12}\cdots b_{1t} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2s} & b_{21} & b_{22}\cdots b_{2t} \\ \cdots & \cdots\quad\cdots & \cdots & \cdots\quad\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{ms} & \cdots b_{m1} & b_{m2}\cdots b_{mt} \end{pmatrix}$$

的秩为 r．证明：$\max(r_1, r_2)\leqslant r\leqslant r_1+r_2$.

证明　由本章学习指导§4补充说明（5）知：矩阵的秩等于其列向量组的秩，于是应用上例的结论即得证．

例 6　若向量β能被向量组 α_1，…，α_{m-1}，α_m 线性表示，但不能被α_1，…，α_{m-1}线性表示时，则α_m可被 α_1，…，α_{m-1}，β 线性表示．

证明　由题设，β能被α_1，…，α_{m-1}，α_m线性表示，所以有：

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}+k_m\alpha_m \qquad (*)$$

要证：α_m可被α_1，…，α_{m-1}，β线性表示，只须证明$k_m\neq0$即可．

因为，若$k_m\neq0$，则有

$$\alpha_m=\frac{1}{k_m}\beta+\frac{-k_1}{k_m}\alpha_1+\cdots+\frac{-k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}.$$

用反证法，若 $k_m=0$，则(*)式化为下面的形式：

$$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$$

与β不能被 α_1，…，α_{m-1} 线性表示相矛盾．所以 $k_m\neq0$，得证．

例 7　设α_1，α_2，…，α_n是$F^{(n)}$中 n 个向量，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$,

α_n线性无关必要而且只要$F^{(n)}$中每一向量都能被它线性表示。

证明　先证必要性。若α_1，α_2，…，α_n线性无关，对于$F^{(n)}$中的任一向量β，把β添加到α_1，α_2，…，α_n中，则α_1，α_2，…，α_n，β必线性相关（因为$F^{(n)}$中任意$n+1$个向量必线性相关——本章§4定理3推论1）

于是β可被α_1，α_2，…，α_n线性表示。必要性得证。

其次证明充分性。

在$F^{(n)}$中选取n个向量所构成的线性无关向量组：

$$\begin{cases} \varepsilon_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\ \varepsilon_2=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0) \\ \qquad\vdots \\ \varepsilon_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1) \end{cases} \qquad (\text{I})$$

当向量组α_1，α_2，…，α_n能线性表示$F^{(n)}$中每一向量时，则ε_1，ε_2，…，ε_n可被α_1，α_2，…，α_n线性表示。

于是由本章§4定理6有：

向量组α_1，α_2，…，α_n的秩≥（Ⅰ）的秩

而（Ⅰ）的秩为n，所以向量组α_1，α_2，…，α_n的秩≥n。

但向量组的秩不可能超过向量组所含向量的个数，所以α_1，α_2，…，α_n的秩等于n。即得：α_1，α_2，…，α_n是本身的极大线性无关组，所以α_1，α_2，…，α_n线性无关得证。

例8　设齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad (1)$$

的系数阵$A=(a_{ij})$的秩等于$n-1$，且A中元素a_{ij}的代数余子式$A_{ij}\neq 0$，则$\alpha=(A_{i1},\ \cdots,\ A_{ij},\ \cdots,\ A_{in})$是（1）的一个基础解系。

证明　因为（1）的系数阵A的秩等于$n-1$，所以由本章§4定理7知，（1）的解空间的维数是：$n-(n-1)=1$，所以（1）的基础解系只含一个向量。

由本章学习指导§4补充说明10可知，只要说明：$\alpha=(A_{i1}, \cdots, A_{ij}, \cdots A_{in})$是（1）的线性无关的解向量，即得证$\alpha$是（1）的基础解系。

因为　$A_{ij}\neq 0$，所以，$\alpha\neq 0$，从而α线性无关。

下面说明：$\alpha=(A_{i1}, \cdots, A_{ij}, \cdots, A_{in})$是齐次方程组(1)的解。

将α的各个分量分别代（1）中的$x_1, x_2, \cdots, x_n$时，则得：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kj}A_{ij}+\cdots+a_{kn}A_{in}=0 \quad i\neq k$$

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\det A=0$$

所以，α是（1）的解。证完。

例9　若$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_t$是非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

的t个解。证明：$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_t\gamma_t$是（1）的解必要而且只要：$k_1+k_2+\cdots+k_t=1$。

证明

令　$\gamma_j=(c_{j1}, c_{j2}, \cdots, c_{jn})$，$j=1, 2, \cdots, t$。

则

$$k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_t\gamma_t=(c_{11}k_1+c_{21}k_2+\cdots+c_{t1}k_t, \cdots, c_{1n}k_1+c_{2n}k_2+\cdots+c_{tn}k_t)$$

代入（1）的第i个方程左边，得：

$$a_{i1}(c_{11}k_1+c_{21}k_2+\cdots+c_{t1}k_t)+a_{i2}(c_{12}k_1+c_{22}k_2+\cdots+c_{t2}k_t)+\cdots+a_{in}(c_{1n}k_1+c_{2n}k_2+\cdots+c_{tn}k_t)$$

$= k_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{12} + \cdots + a_{in}c_{1n}) + k_2(a_{i1}c_{21} + a_{i2}c_{22} + \cdots$

$+ a_{in}c_{2n}) + \cdots + k_t(a_{i1}c_{t1} + a_{i2}c_{t2} + \cdots + a_{in}c_{tn})$

$= k_1b_i + k_2b_i + \cdots + k_tb_i = (k_1 + k_2 + \cdots + k_t)b_i$

由此可知，$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_t\gamma_t$是非齐次线性方程组（1）的解，必要而且只要：

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_t)b_i = b_i \quad i = 1, 2, \cdots, m \qquad (*)$$

因为（1）为非齐次线性方程组，所以在常数项中至少有一$b_i \neq 0$。因此，（*）式成立必要而且只要：$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$。

总此证得：$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \cdots + k_t\gamma_t$ 是（1）的解必要而且只要：$k_1 + k_2 + \cdots + k_t = 1$。

例10　设向量组α_1，α_2，…，α_s（Ⅰ）线性无关，并可被向量组 β_1，β_2，…，β_t　（Ⅱ）线性表示，则

（1）$s \leqslant t$

（2）适当地排列向量组（Ⅱ）的次序，可将向量组（Ⅰ）替换向量组（Ⅱ）中前 s 个向量，使得向量组 α_1，α_2，…，α_s，β_{s+1}，…，β_t与向量组（Ⅱ）等价（替换定理）。

证明　结论（1）可由本章 § 4 定理 6 直接得到。

下面证明结论（2）。

对向量组（Ⅰ）的向量个数 s，作数学归纳法。

当　$s = 1$时，因为

$\alpha_1 = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_t\beta_t$

而且α_1线性无关，所以 k_1，k_2，…，k_t不能都等于 0。适当地改变β_1，β_2，…，β_t的次序，可以假定$k_1 \neq 0$。于是有：

$$\beta_1 = \frac{1}{k_1}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_1}\beta_2 - \cdots - \frac{k_t}{k_1}\beta_t$$

因此向量组β_1，β_2，…，β_t和向量组：α_1，β_2，…，β_t 等价。即结论（2）对 $s = 1$ 时成立。

假定对 $s-1$来说，结论（2）成立，去证结论（2）对 s 成立。

从向量组 α_1，…，α_{s-1}，α_s 中取出前 $s-1$ 个向量，则 α_1，

$\cdots$，α_{s-1} 仍然线性无关且可被向量组（Ⅰ）线性表示．于是由归纳法假定，可适当调换（Ⅱ）中向量的次序．可将 α_1，α_2，$\cdots$，α_{s-1}替换到（Ⅱ）中，使

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_{s-1}, \beta_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t \quad (\text{Ⅲ})$$

与向量组（Ⅱ）等价。

因为α_s可被（Ⅰ）线性表示，而（Ⅱ）与（Ⅲ）等价，所以α_s可被（Ⅲ）线性表示：

$$\alpha_s = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_s\beta_s + k_{s+1}\beta_{s+1} + \cdots + k_t\beta_t$$

因为 α_s 是线性无关的向量组中的向量，所以 $\alpha_s \neq 0$。因此，k_1，$\cdots$，k_{s-1}，k_s，k_{s+1}，$\cdots$，k_t不能都等于 0 。

进一步，因为 α_1，α_2，$\cdots$，α_{s-1}，α_s 线性无关（题设），所以，α_s不能被α_1，$\cdots$，α_{s-1}线性表示，所以可知：在不全为 0 的这组数k_1，$\cdots$，k_{s-1}，k_s，k_{s+1}，$\cdots$，k_t中，k_s，k_{s+1}，$\cdots$，k_t 不能都等于 0 。否则将导出α_s可被α_1，$\cdots$，α_{s-1}线性表示的矛盾。

于是，适当调换 β_s，$\cdots$，β_t 的次序，可以假定 $k_s \neq 0$。从而有：

$$\beta_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_s}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} + \frac{1}{k_s}\alpha_s - \frac{k_{s+1}}{k_s}\beta_{s+1} - \cdots - \frac{k_t}{k_s}\beta_t$$

上式说明：β_s可被向量组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t$$

线性表示。

因此向量组α_1，$\cdots$，α_{s-1}，α_s，β_{s+1}，$\cdots$，β_t与向量组α_1，$\cdots$，α_{s-1}，β_s，β_{s+1}，$\cdots$，β_t等价。

而α_1，$\cdots$，α_{s-1}，β_s，β_{s+1}，$\cdots$，β_t与向量组（Ⅱ）等价，所以有：

α_1，$\cdots$，α_{s-1}，α_s，β_{s+1}，$\cdots$，β_t 与向量组（Ⅱ）等价．总此，替换定理得到证明。

另法。

由题设：β_1，β_2，…，β_t与α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_t，等价，而α_1，α_2，…，α_s线性无关。所以可将α_1，α_2,…,α_s扩充为α_1，α_2，…，α_s，β_1，β_2，…，β_t的一个极大线性无关组：

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \cdots, \beta_{i_r}$$

此处$r\leqslant t$，如果$r=t$定理已被证明；若$r<t$则可任取$\beta_{i_{r+1}}$，…，β_{i_t}使α_1，α_2，…，α_s，$\beta_{i_{s+1}}$，…，β_{i_r}，$\beta_{i_{r+1}}$，…，β_{i_t}与β_1，β_2，…，β_t等价。于是替换定理得证。

练习与习题解答

第一章　数的基础知识

练　习　一

1. 用第一数学归纳法.

1） 当 $n=1$ 时等式成立.

2） 假设 $n=k$ 时等式成立，看 $n=k+1$ 的情形. 于是

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2\\
&=[1^2+2^2+\cdots+k^2]+(k+1)^2\\
&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\
&=\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}\\
&=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\
&=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立，所以对一切自然数 n 等式都成立.

2. 用第一数学归纳法.

1） 当 $n=1$ 时等式成立.

2） 假设 $n=k$ 时等式成立，看 $n=k+1$ 的情形，于是

$$
\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\
&=[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立，因此对一切自然数 n 等式都成立。

3．用第一数学归纳法。

1）当 $n=1$ 时等式成立。

2）假设 $n=k$ 时等式成立，看 $n=k+1$ 的情形，于是

$$\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \left[\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}.$$

这表明 $n=k+1$ 时等式也成立。因此对一切自然数 n 等式都成立。

4．用第一数学归纳法。

1）当 $n=1$ 时不等式成立。

2）假设 $n=k$ 时不等式成立，看 $n=k+1$ 的情形。于是

$$2^{k+1} = 2\cdot2^k > 2k \geqslant k+1.$$

这表明 $n=k+1$ 时不等式也成立。因此对一切自然数 n 不等式都成立。

5．用第一数学归纳法。

1）当 $n=1$ 时公式成立。

假设 $n=k$ 时公式成立，看 $n=k+1$ 的情形，于是

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$$
$$=(a^k+c_1^k a^{k-1}b+\cdots+c_r^k a^{k-r}b^r+\cdots+b^k)(a+b)$$
$$=a^{k+1}+(c_1^k+1)a^k b+\cdots+(c_r^k+c_{r-1}^k)a^{k+1-r}b^r+\cdots+b^{k+1}$$
$$=a^{k+1}+c_1^{k+1}a^k b+\cdots+c_r^{k+1}a^{k+1-r}b^r+\cdots+b^{k+1}.$$

这表明$n=k+1$时公式也成立，因此对一切自然数n公式都成立。

练　习　二

1．1）$(3468,-595)=17$；

2）$(110143,70091)=10013$。

2．先用辗转相除法求出：$(135,243)$。

$243=135.1+108$，

$135=108.1+27$，

$108=27.4$。

由此，$(135,243)=27$，进而

$27=135+108.(-1)$，$108=243+135(-1)$，

于是

$$27=135+[243+135\cdot(-1)]\cdot(-1)$$
$$=135.2+243\cdot(-1).$$

即$u=2$，$v=-1$，使$(135,243)=135u+243v$。

3．令$d=(a,b)$，$au+bv=d$，首先指出$cd\backslash ca$，$cd\backslash cb$，即cd是ca与cb的公约数．于是由$cau+cbv=cd$，便知cd是ca与cb的最大公约数，即$(ca,\ cb)=c(a,b)$。

4．首先，由上题，$(a,\ b)=(da_1,\ db_1)=d(a_1,\ b_1)$。由此显见，$(a,b)=d$当且仅当$(a_1,b_1)=1$。

练　习　三

1．用反证法，假设$a+b$与ab不互质，从而$a+b$与ab必有

质约数 p：$p\backslash a+b$，$p\backslash ab$。于是 $p\backslash a$ 或 $p\backslash b$。

若 $p\backslash a$ 又 $p\backslash a+b$ 则 $p\backslash b$，这与$(a,b)=1$矛盾；

若 $p\backslash b$ 又 $p\backslash a+b$ 则 $p\backslash a$，这也和$(a,b)=1$矛盾.这表明$a+b$ 与 ab必定互质。

另一证明方法。

由$(a,b)=1$可有 $au+bv=1$。于是

$au+bu+bv-bu=1$，即 $(a+b)u+b(v-u)=1$；

$au-av+av+bv=1$，即 $a(u-v)+(a+b)v=1$。

因而$(a+b,\ a)=1$，$(a+b,\ b)=1$，所以$(a+b,\ ab)=1$。

2。此题可有三种证明方法。分列如下。

1）$(c,\ b)\backslash ac$，$(c,\ b)\backslash b$ 从而$(c,\ b)\backslash(ac,b)$；$(ac,\ b)\backslash ac$，由$(a,b)=1$可知 $((ac,\ b),\ a)=1$，于是$(ac,\ b)\backslash c$，$(ac,\ b)\backslash b$，因而$(ac,b)\backslash(c,b)$。总之$(ac,\ b)=(c,\ b)$。

2）令$(c,\ b)=d$，$cu+bv=d$，显然 $(c,\ b)\backslash(ac,\ b)$。于是由 $au'+bv'=1$。则有$(au'+bv')(cu+bv)=d$，即

$$acu'u+b(au'v+cuv'+bvv')=d$$

因此 $d=(c,b)$是 ac 与 b 的最大公约数：$(ac,b)=(c,b)$。

3）令 a，b，c 的一般标准分解式为

$$a=p_1^{l_1}\cdots p_r^{l_r}p_{r+1}^0\cdots p_u^0$$

$$b=p_1^0\cdots p_r^0p_{r+1}^{s_{r+1}}\cdots p_u^{s_u}$$

$$c=p_1^{t_1}\cdots p_r^{t_r}p_{r+1}^{t_{r+1}}\cdots p_u^{t_u}$$

于是

$$ac=p_1^{l_1+t_1}\cdots p_r^{l_r+t_r}p_{r+1}^{t_{r+1}}\cdots p_u^{t_u}.$$

这样明显可见

$$(ac,b)=p_{r+1}^{k_{r+1}}\cdots p_u^{k_u}=(c,b),$$

其中 $k_{r+1}=\min(s_{r+1},\ t_{r+1})$，$\cdots$，$k_u=\min(s_u,\ t_u)$。

3．用反证法，假设 p 有所说的性质，但 p 不是质数，于是必有 $p=uv$，这里 $1<u,v<p$，这表明 $p\backslash uv$，可是 p不整除u，p也不整除v。这个矛盾指出 p 不能不是质数。

4．考虑 a 与 b 的一般标准分解式．可令

$$a = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_r^{l_r},$$

$$b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}.$$

于是

$$a^2 = p_1^{2l_1} p_2^{2l_2} \cdots p_r^{2l_r},$$

$$b^2 = p_1^{2t_1} p_2^{2t_2} \cdots p_r^{2t_r}.$$

因为 $a^2 \backslash b^2$，所以 $2l_1 \leqslant 2t_1$，$2l_2 \leqslant 2t_2$，…，$2l_r \leqslant 2t_r$，从而 $l_1 \leqslant t_1$，$l_2 \leqslant t_2$，…，$l_r \leqslant t_r$ 由此便得 $a \backslash b$．

练　习　四

1．1）任取 α_1，$\alpha_2 \in F_1$，令 $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$，$\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$ 于是

$\alpha_1 \pm \alpha_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{3}$，$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 a_2 + 3b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\sqrt{3}$，当 $\alpha_2 \neq 0$ 时，a_2, b_2 不同时为 0，从而 $a^2{}_2 - 3b^2{}_2 \neq 0$，于是

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + b_1\sqrt{3}}{a_2 + b_2\sqrt{3}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 - b_2\sqrt{3})}{(a_2 + b_2\sqrt{3})(a_2 - b_2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{a_1 a_2 - 3b_1 b_2}{a_2^2 - 3b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 - 3b^2{}_2}\sqrt{3}$$

这就说明 F_1 能够进行四则运算，F_1 做成数域．同理可以验证 F_2 也是数域．

2．在 §4 中我们已经有一种大小关系使复数集 C 成为有序数集．仿此，我们自然又有另外一个大小关系也使 C 成为有序数集，即

令 $\alpha = a + bi$，$\beta = c + di$ 为任二复数，规定

$\alpha < \beta$ 当且仅当 $a > c$ 或 $a = c$ 时 $b > d$．

这样容易验证在这个大小关系之下，C 满足有序数集的条件．

3．因为实数域 D 是 F 的真子集，所以必有复数 $\alpha = a + bi \in F$，并且 $b \neq 0$．于是

$$a-a=bi\in F,\quad 又b\neq 0,\ ,\quad \frac{1}{b}(bi)=i\in F$$

从而对任意的 u，$v\in D$，$u+vi\in F$，即 $F=C$。

习　题　一

1．

1）容易看出，$n=1$ 时不等式成立，而 $n=2$，3，4 时不等式不成立．下面用数学归纳法证明对于$\geqslant 5$ 的一切自然数 n，不等式都成立。

2）当 $n=5$时，$2^5>5^2$，即不等式成立．

3）假设不等式对于 $k\geqslant 5$ 成立，看 $n=k+1$ 的情形．于是

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2\cdot k^2=k^2+k^2>k^2+2k+1=(k+1)^2.$$

这样，当 $n=k+1$ 时不等式也成立，所以对$\geqslant 5$ 的一切自然数 n 不等式都成立．总之，除去 $n=2,3,4$ 这三个数，不等式对其它的自然数都成立。

2．用第一数学归纳法。

1）当 $n=1$ 时不等式成立。

2）假设 $n=k$ 时不等式成立，看$n=k+1$ 的情形，于是

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\geqslant(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h.\end{aligned}$$

这样当 $n=k+1$ 时不等式也成立，所以不等式对一切自然数 n 都成立。

3．用第一数学归纳法．

1）当 $n=1$ 时，一个元素的集合恰有两个子集，即2^1个子集。因此命题成立。

2）假设 $n=k$ 时命题成立，即任一 k 个元素的集合恰有2^k个子集．下面看$n=k+1$的情形，为此令$M=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1}\}$是任一含有 $k+1$ 个元素的集合．我们考虑把M的子集分为两类：

第一类，此类子集都不含有元素 a_{k+1}。从而它们都是集合

$M'=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$的子集．而 M'的每一子集显然也是集合M的子集，而且是第一种类型的。这样，M的第一类子集共有 2^k 个。

第二类，此类子集都含有元素a_{k+1}，因此它们正好是在 M' 的每个子集里再添上元素 a_{k+1} 得到的一切子集。这样，M的第二类子集也共有2^k个。于是M的子集 总 共 有 $2^k+2^k=2^{k+1}$ 个。即当 $n=k+1$ 时命题也成立，所以命题对一切自然数 n 都成立。

4．写出 a 与 b 的一般标准分解式：

$$a=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_r^{l_r}$$

$$b=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r},$$

于是 a^m 与 b^m 的一般标准分解式就是

$$a^m=p_1^{ml_1}p_2^{ml_2}\cdots p_r^{ml_r}$$

$$b^m=p_1^{ms_1}p_2^{ms_2}\cdots p_r^{ms_r}.$$

若令 $t_i=\min(l_i, s_i)$，$i=1, 2, \cdots, r$。那么显然可见 $mt_i=\min(ml_i, ms_i)$由此便得

$$(a, b)=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r}$$

$$(a^m, b^m)=p_1^{mt_1}p_2^{mt_2}\cdots p_r^{mt_r}.$$

因为$p_1^{mt_1}p_2^{mt_2}\cdots p_r^{mt_r}=(p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_r^{t_r})^m$，所以$(a^m, b^m)=(a,b)^m$。

5．任取相邻二整数 a 与 $a+1$，设$(a, a+1)=d$，于是 $d\backslash a$，$d\backslash a+1$，从而 $d\backslash 1$这样 必有 $d=1$，即 a 与 $a+1$ 互质。

此题尚可有如下两种考虑：

由 $(a+1)\cdot 1+a\cdot(-1)=1$，可见 a 与 $a+1$ 互质。

由 $a+1=a\cdot 1+1$

$a=1\cdot a$

也能得出 a 与 $a+1$ 互质的结论。

6．用反证法，假设只有有限个质数，设为 $p_1, p_2, \cdots, p_r$。考虑正整数 $m=p_1p_2\cdots p_r+1$，显然m不等于任何一个 $p_i(i=1,2, \cdots, r)$。因此m为合数，从而m必有质约数。这样，$p_1, p_2, \cdots, p_r$当中只少有一个质数 p_i 是m的约数。但是，明显可见任何一个 p_i都不能整除m，否则将有 $p_i\backslash 1$。这个矛盾说明质数不能只有有限

个，而有无限个。

7．用反证法．假设$\sqrt{p}$是有理数，于是可令$\sqrt{p}=\frac{a}{b}$，$(a,b)=1$，从而便有 $pb^2=a^2$．这表明 $p\backslash a^2$，因为 p 是质数，所以 $p\backslash a$．令$a=pa_1$，则得 $pb^2=p^2a_1^2$，从两端消去 p，得 $b^2=pa_1^2$，这又说明 $p\backslash b^2$，而由 p 是质数．则有 $p\backslash b$．这样 p 是 a 与 b 的公约数，和 a 与 b 互质相矛盾．故而$\sqrt{p}$不能是有理数．

8．

1）F_1 是数环，因为任取$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}\in F_1$，则有

$$\frac{a_1}{b_1}\pm\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2\pm a_2b_1}{b_1b_2}\in F_1,\quad \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}\in F_1.$$

但 F_1 不是数域，因为$1\overline{\in}F_1$．

2）F_2 是数域，自然也是数环，因为任意取定，$a_1+b_1\sqrt{-2}$，$a_2+b_2\sqrt{-2}\in F_2$，则有

$$(a_1+b_1\sqrt{-2})\pm(a_2+b_2\sqrt{-2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{-2}\in F_2,$$

$$(a_1+b_1\sqrt{-2})(a_2+b_2\sqrt{-2})=(a_1a_2-2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{-2}\in F_2,$$

当 $a_2+b_2\sqrt{-2}\neq 0$时，还有

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{-2}}{a_2+b_2\sqrt{-2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{-2})(a_2-b_2\sqrt{-2})}{(a_2+b_2\sqrt{-2})(a_2-b_2\sqrt{-2})}$$

$$=\frac{a_1a_2+2b_1b_2}{a_2^2+2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+2b_2^2}\sqrt{-2}\in F_2,$$

这就说明 F_2 可以进行四则运算，即 F_2 是数域．从而，F_2 自然也是数环．

3）F_3 是数环，因为任取 a_1+b_1i，$a_2+b_2i\in F_3$，则有

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i\in F_3,$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\in F_3,$$

所以 F_3 是数环.

但是，F_3 不是数域，这是因为 F_3 不含有一切有理数，比如$\frac{1}{2}$就不在 F_3 里.

4）F_4 是数环.因为任取 $\frac{m_1}{2^{n_1}}$，$\frac{m_2}{2^{n_2}}\in F_4$，　　则有

$$\frac{m_1}{2^{n_1}}\pm\frac{m_2}{2^{n_2}}=\frac{m_1 2^{n_2}\pm m_2 2^{n_1}}{2^{n_1+n_2}}\in F_4,$$

$$\frac{m_1}{2^{n_1}}\cdot\frac{m_2}{2^{n_2}}=\frac{m_1 m_2}{2^{n_1+n_2}}\in F_4.$$

所以 F_4 是数环。

但是，F_4 不是数域，这是因为 F_4 不含有一切有理数，比如$\frac{1}{3}$就不在 F_4 里，事实上，假设$\frac{1}{3}\in F_4$，则有

$$\frac{1}{3}=\frac{m}{2^n}，其中 m，n\in Z.$$

于是 $2^n=3m$。这时不论 n 是正整数，负整数，零，等式 $2^n=3m$都不能成立。因而$\frac{1}{3}\overline{\in} F_4$，即 F_4 不是数域。

9．首先我们明确一下，数集 F 恰好是由 F_1 与 F_2 所共同含有的数组成的。

任取a，$b\in F$，于是a，$b\in F_1$，同时a，$b\in F_2$，因为 F_1 与 F_2 都是数域，所以 $a\pm b\in F_1$，$ab\in F_1$。同时 $a\pm b\in F_2$，$ab\in F_2$，并且当$b\neq 0$时，还有$\frac{a}{b}\in F_1$，同时$\frac{a}{b}\in F_2$，这样就有$a\pm b\in F$，$ab\in F$，并且当$b\neq 0$时 $\frac{a}{b}\in F$。这就说明数集 F 可以进行四则运算，即 F 是数域。

10．我们只要证明，对不同的两个质数 p_1 与 p_2，数域

$F_1=\{a+b\sqrt{p_1}|a,\ b\in Q\}$与$F_2=\{a+b\sqrt{p_2}|a,\ b\in Q\}$

也不相同就足够了。

我们用反证法，即假设 $F_1=F_2$，从而自然有$\sqrt{p_2}\in F_1$。于是可令$\sqrt{p_2}=a+b\sqrt{p_1}$。把这个等式两端平方，则有 $p_2=a^2+b^2p_1+2ab$

$\sqrt{p_1}$. 这里容易指出：a 与 b 都不等于 0，因为 $b=0$ 时，$\sqrt{p_2}=a$ 是有理数，这不可能；$a=0$ 时，$\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}=b$ 是有理数，这也不可能，这样由 $ab\neq 0$，则有 $\sqrt{p_1}=\frac{1}{2ab}\left(p_2-a^2-b^2p_1\right)$. 这又说明 $\sqrt{p_1}$ 是有理数，当然这也是不可能的. 总之，必须是 $F_1\neq F_2$.

因为质数有无限多个，所以形如

$$F=\{a+b\sqrt{p}\,|a, b\in Q, p \text{ 为质数}\}$$

的数域也就有无限多个不同的.

第二章　一元多项式

练　习　一

1．（1）．（2）用数学归纳法证之．

2．如果 $g(x)$ 与 $h(x)$ 都等于零．则 $f(x)=0$，结果成立．如果 $g(x)$ 与 $h(x)$ 中至少有一个不等于零，那么 $xg^2(x)+xh^2(x)\neq 0$，从而 $f^2(x)\neq 0$，易见 $\deg[xg^2(x)+xh^2(x)]$ 为奇数，而 $\deg f^2(x)$ 为偶数，与（1）式矛盾．故必有 $g(x)=h(x)=0$．于是 $f^2(x)=0$，从而 $f(x)=0$．

练　习　二

1．若 $h(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x)$ 能被 $g(x)$ 整除．则

$$f_i(x)=h(x)-f_1(x)-\cdots-f_{i-1}(x)-f_{i+1}(x)-\cdots-f_s(x)$$

也能被 $g(x)$ 整除，与题设矛盾．

2．充分性　若 $x|f(x)$，当然有 $x|f^k(x)$．

必要性　已知 $x|f^k(x)$，若 x 不整除 $f(x)$，$f(x)$ 的常数项必不为零．设其常数项为 a_0，于是 $f^k(x)$ 的常数项为 a_0^k．显然，$x|f^k(x)-a_0^k$ 由第 3 题知 $x|a_0^k$ 这是不可能的．故 $x|f(x)$．

3．根据最大公因式定义，只需证 $f(x)$，$g(x)$ 的任意公因式 $d_1(x)$ 有 $d_1(x)|d(x)$．

练 习 三

1. (1) $x+1$; (2) 1.

2. (1) $u(x)=-x-1$, $v(x)=x+2$.

(2) $u(x)=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$, $v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$.

3. 由 $(f(x), g(x))=1$, 则有 $u(x)$, $v(x)$使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

以任意多项式 $\varphi(x)$乘上式两边得

$$\varphi(x)u(x)f(x)+\varphi(x)v(x)g(x)=\varphi(x)$$

这时只要取 $h(x)=\varphi(x)u(x)$, $k(x)=\varphi(x)v(x)$即可。

反之，由题设知，对多项式1，有 $h(x)$, $k(x)$使得

$$h(x)f(x)+k(x)g(x)=1$$

故 $(f(x), g(x))=1$。

4. 在等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

中以 x^m 代替 x 即可得证。

5. 设 $d(x)=(f(x), g(x))$, 有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$$

于是有

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=d(x)h(x)$$

因为 $d(x)|f(x)$, 所以 $d(x)h(x)|f(x)h(x)$, 又因为 $d(x)|g(x)$, 所以, $d(x)h(x)|g(x)h(x)$。利用练习二的第3题即可得证。

6. 由$(f(x), g(x))=1$, 有

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

于是

$$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=h(x).$$

设 $d(x)=(f(x), g(x)\cdot h(x))$, 则 $d(x)|h(x)$. 故 $d(x)$ 整除

$(f(x), h(x))$但$(f(x), h(x))=1$ 所以 $d(x)=1$。

练　习　四

1．设 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式中次数最小者，若 $g(x)$ 可约，则 $g(x)=g_1(x)g_2(x)$。且 $0<\deg g_i(x)<\deg g(x)$，$(i=1,2)$而 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 显然也为 $f(x)$ 的因式。此与 $g(x)$ 为 $f(x)$ 因式中次数最小者矛盾。

2．反证，若$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，取$f(x)=p_1(x)$，$g(x)=p_2(x)$就可推出矛盾。

3．用反证法：若 $(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=d(x)$。$\deg d(x)>0$，则 $d(x)=p(x)d_1(x)$。其中 $p(x)$ 为不可约多项式，而 $d(x)|f(x)g(x)$，所以 $p(x)|f(x)g(x)$，这样就可推出 $p(x)|g(x)$，或者 $p(x)|f(x)$。而如果 $p(x)|f(x)$，又 $p(x)|f(x)+g(x)$，从而 $p(x)|g(x)$。于是与题设矛盾。

同理如果 $p(x)|g(x)$也会推出与题设矛盾。

练　习　五

1．（1）有重因式$(x+1)$，其重数为 4；

（2）有重因式$(x-2)$，其重数为 3。

2．（1）$4a^3+b^2=0$。

（2）$27a^4-b^3=0$。

3．因为 $f(x)=f'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$。所以

$$(f(x), f'(x))=\left(f'(x), \frac{x^n}{n!}\right)=1.$$

从而知 $f(x)$无重因式。

4．（1）$f(x)=(x-4)(x+1)^4$。

（2）$f(x)=(x-2)(x-1+i)^2(x-1-i)^2$。

练 习 六

1. （1）136；（2）4677.

2. 反复用综合除法知 5 是 $f(x)$的二重根.

3. （1）$b=-8$ （2）$a=-3$，$b=9$.

4. 用反证法：若 $f(x)=x^n+ax^{n-m}+b$ 有不为 0 的重数大于 2 的根，则

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-m)ax^{n-m-1}=x^{n-m-1}[nx^m+(n-m)a]$$

有不为 0 的重根，但 $f'(x)$除 0 外没有重根，因 $nx^m+(n-m)a$ 均为单根.

5. 必要性：由题设知 a 分别是 $f'(x)$的 $k-1$ 重根，$f''(x)$的 $k-2$重根，…，$f^{(k-1)}(x)$的 1 重根，但 a 不是 $f^{(k)}(x)$的根. 故

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(k-1)}(a)=0,\text{ 但 } f^{(k)}(a)\neq 0$$

充分性：由 $f(a)=f'(a)=0$ 知，a 为$f(x)$的重根，即 $x-a$ 是 $f(x)$的重因式，设其重数为 l，于是有

$$f(x)=(x-a)^l q(x),\ x-a\text{不整除}q(x)$$

若 $l>k$，则 $f^{(k)}(a)=0$，矛盾.

若 $l<k$，则 $f^{(k-1)}(a)\neq 0$ 也矛盾. 故 $l=k$，a 为 $f(x)$ 的 k 重根.

练 习 七

1. （1）$y^4-7y^3+48y^2-252y+432=0$

（2）$y^3-26y^2+9y-108=0$.

2. 以3^3乘方程即得所求方程为

$y^4-4y^3+12y^2-18y+27=0$.

3. $y^6-7y^5+21y^4-35y^3+35y^2-21y+7=0$.

4. $y^6+7y^5+5y^4-2y^2+1=0$.

5. 所得方程为 $y^4-9y^2-12y-2=0$.

练 习 九

1. 因为奇次的实系数多项式在实数域内的标准分解式中必有一次因式，所以至少有一个实根.

2. （1）（-9，5）

（2）（-2，2）

3. （1）一个实根. 在区间（1，2）中，

（2）2个实根，分布在区间（-1,0），(1,2)中.

（3）没有实根.

4. 充分性：首先显然无重根. 若首项系数皆为正，$x=+\infty$ 变号数为0，$x=-\infty$ 变号数为 n，故变号差为 n. 系数符号为负亦如此，故有 n 个实根，且皆为单根.

必要性：因为无重根，所以其斯图姆组必由 $n+1$ 个多项式组成，且其变号差为 $V(-\infty)-V(+\infty)=n$. 因此必有 $V(-\infty)=n$，$V(+\infty)=0$. 这只有首项系数同号才有可能. 必要性得证.

练 习 十

1. （1）至（6）都是不可约的，除直接可应用艾森斯坦因判断法外，其余只要做一下变量替换 $x=y+1$ 或 $x=y-1$ 即可应用艾森斯坦因判断法.

2. 由题设知

$$f(x)=\left(x-\frac{p}{q}\right)g(x)=(qx-p)\left(\frac{1}{q}g(x)\right)$$

由 $f(x)$为整系数多项式，$qx-p$ 为本原多项式. 因此$\frac{1}{q}g(x)$必为整系数的. 于是 $f(1)=(q-p)\frac{g(1)}{q}$. 而$\frac{g(1)}{q}$为整数，所以 $q-p\mid f(1)$.

又因为$f(-1)=(-q-p)\frac{1}{q}g(-1)$，而$\frac{1}{q}g(-1)$为整数，所以$q+p|f(-1)$。

3．用反证法．

假设α是$f(x)$的一个整数根，则

$$f(x)=(x-\alpha)q(x).$$

显然，$q(x)$为整系数多项式．而

$$f(0)=-\alpha q(0)$$

$$f(1)=(1-\alpha)q(1)$$

因为α与$1-\alpha$中必有一个为偶数，从而$f(0)$与$f(1)$中至少有一个为偶数，与题设矛盾．故$f(x)$无整数根．

4．用反证法

若$\frac{p}{q}$为$f(x)$的有理根，$(p,q)=1$，则$q|a_0$，$p|a_n$。由于a_0，a_n皆为奇数，故p，q也均为奇数．由第2题知

$$q+p|f(-1),\quad q-p|f(1).$$

而，$p+q$，$q-p$均为偶数．这与$f(1)$和$f(-1)$中至少有一个为奇数矛盾．故$f(x)$没有有理根。

5．（1）只有一个有理根2；（2）有两个有理根：$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$；（3）有5个有理根：3，-1，-1，-1，-1。

练习十一

1．（1）$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$

（2）$\frac{3x-7}{(x-2)^3}=\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^3}$

（3）$\frac{1}{(x^4-1)^2}=\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2}$

（4）$\frac{5x^2-1}{(x^2+3)(x^2-2x+5)}=\frac{-2x-2}{x^2+3}+\frac{2x+3}{x^2-2x+5}$

2. $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{c-b}{x-a}+\frac{a-c}{x-b}+\frac{b-a}{x-c}$

3. 将通项分解成部分分式：

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2},$$

得 $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，$c=\frac{1}{2}$ 于是

$$和=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].$$

习 题 二

1. 由题设有 $u(x)$，$v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

配项得

$$u(x)f(x)-v(x)f(x)+v(x)f(x)+v(x)g(x)=1$$

$$[u(x)-v(x)]f(x)+v(x)[f(x)+g(x)]=1$$

故

$$(f(x),\ f(x)+g(x))=1$$

同理可证

$$(g(x),\ f(x)+g(x))=1$$

再由练习三第 6 题可得

$$(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$$

2. 只要证明

$$(g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_s(x))=1$$

即可，因为

$$(g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_s(x))$$
$$=((g_1(x),\ g_2(x)),\ g_3(x),\ \cdots,\ g_s(x))$$
$$=\left((f_1(x),\ f_2(x))\frac{f(x)}{f_1(x)f_2(x)},\ g_3(x),\ \cdots,\ g_s(x)\right)$$

$$=\left(\frac{f(x)}{f_1(x)f_2(x)},\ g_3(x),\cdots,\ g_s(x)\right)$$

$$=\left(\frac{f(x)}{f_1(x)f_2(x)f_3(x)},\ g_4(x),\ \cdots,\ g_s(x)\right)$$

$$=\left(\frac{f(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_{s-1}(x)},\ g_s(x)\right)$$

$$=(f_s(x),\ g_s(x))$$

$$=(f_s(x),\ f_1(x)f_2(x)\cdots f_{s-1}(x))$$

$$=1$$

也可用归纳法的格式写出。

3．必要性：令 $f(x)=p^m(x)$，$p(x)$ 为不可约多项式，对任意多项式 $g(x)$，或者 $(p(x),\ g(x))=1$，此时也有 $(f(x),\ g(x))=1$。或者 $p(x)|g(x)$，这时 $p^m(x)$整除 $g^m(x)$。即 $f(x)|g^m(x)$。

充分性：用反证法

设 $f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$，$k_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 且 $s\geqslant2$，于是对于$g(x)=p_1^{k_1}(x)$来说，有$(f(x),\ g(x))\neq1$，而对任何正整数m，也必有 $f(x)$不整除$g^m(x)$，故与已知矛盾，

4．必要性：由上题知，$f(x)$ 与 $h(x)$ 的关系只有两种可能，若 $(f(x),\ h(x))=1$ 则由：$f(x)|g(x)h(x)$ 可推出：$f(x)|g(x)$；若 $(f(x),\ h(x))\neq1$，则必有某一正整数m，使：

$$f(x)|h^m(x)$$

充分性：用反证法

若 $f(x)=a_0p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$，$k_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,s)$ 并且$s\geqslant2$，取 $h(x)=a_0p_1^{k_1}(x)$，$g(x)=p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)$，则

$f(x)|g(x)h(x)$，但$f(x)$不整除$g(x)$，且$f(x)$不整除$h^m(x)$。

5．设 $f(x)=(x-a)^kq(x)$，$x-a$不整除$q(x)$。则有

$$f'(x)=(x-a)^{k-1}[kq(x)+(x-a)q'(x)]$$

从而得到

$$g(x)=f(x)+(a-x)f'(x)$$

$$=(x-a)^kq(x)+(a-x)(x-a)^{k-1}[kq(x)$$

$$+(x-a)q'(x)]$$

$$=(x-a)^k[(1-k)q(x)+(a-x)q'(x)]$$

由于 $k>1$，所以，$1-k\neq 0$，知

$$x-a\text{不整除}(1-k)q(x)+(a-x)q'(x)$$

故 $x-a$ 是 $g(x)$的 k 重因式。

当 $k=1$ 时，$1-k=0$，所以有

$$g(x)=(x-a)^k(a-x)q'(x)$$

$$=-(x-a)^{k+1}q'(x).$$

如果 $q(x)$是常数 c，那么 $g(x)$是零多项式；如果$q(x)$ 的次数大于 0，那么$g(x)$关于因子 $x-a$ 的重数至少是$k+1=2$ 重的。

6．不能。只要举一反例即可。

令 $\quad f(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)^3+1$

$$f'(x)=(x^2+1)^2\cdot 2x,$$

显然 x^2+1是 $f'(x)$的二重因式，但不是 $f(x)$的三重因式。一般地，令$f(x)=\frac{1}{k}p^k(x)+c$，$c\neq 0$，即可说明问题。

7．因为$x-1|ax^4+bx^3+1$。所以

$$a\cdot 1^4+b\cdot 1^3+1=a+b+1=0, \tag{1}$$

又因为

$$x-1|(ax^4+bx^3+1)'$$

于是

$$4a+3b=0 \tag{2}$$

（1）与（2）联立，解之得

$$a=3,\ b=-4$$

8．用反证法：

若 $f(x)$ 为非常量，则 $\deg f(x)=n>0$，在复数域中设 α 为其一根，则 $f(\alpha)=f(\alpha-c)=0$。这说明 $\alpha-c$ 也是 $f(x)$ 的根。由条件对任意 $c\neq 0$，均有 $f(x)=f(x-c)$。故 α，$\alpha-c$，$\alpha-2c$，$\alpha-3c$，

……均为 $f(x)$ 的根，且两两不同。但 $f(x)$ 在复数域中最多有 n 个根，这是不可能的。故 $f(x)$ 必为常量。

9。必要性：由 $x^d-1|x^n-1$ 知 x^d-1 的根都是 x^n-1的根。设 ε 是 x^d-1的 d 次单位原根，则 $\varepsilon^n=1$，令 $n=dq+r$，$0\leqslant r<d$。由

$$1=\varepsilon^n=\varepsilon^{dq+r}=\varepsilon^r$$

知 $r=0$，故 $d|n$。

充分性：由 $d|n$ 知 $n=qd$，所以

$$x^n-1=(x^d)^q-1=(x^d-1)((x^d)^{q-1}+(x^d)^{q-2}+\cdots+1)$$

即

$$x^d-1|x^n-1。$$

10。证明　设 α 是 $f(x)$ 的任意一个根，由 $x-\alpha|f(x)$及 $f(x)|f(x^n)$。故 $x-\alpha|f(x^n)$。从而可知 $f(\alpha^n)=0$。所以，α^n 也是 $f(x)$ 的根。同理可推得

$$\alpha,\ \alpha^n,\ \alpha^{n^2},\ \alpha^{n^3},\ \cdots,$$

也是 $f(x)$ 的根。如果 $\deg f(x)=m$，那么，这些根中最多只可能有 m个不同的。即存在 $k>l$，使

$$\alpha^{n^k}=\alpha^{n^l}$$

$$\alpha^{n^l}(\alpha^{n^k-n^l}-1)=0$$

由此可见 α 或者为 0，或者为单位根。

11。由题设知

$$(p(x),\ f(x))=1$$

或者

$$p(x)|f(x)$$

但由于 $f(x)$ 与 $p(x)$ 在复数域上有公根 α，故在复数域上 $f(x)$ 与 $p(x)$ 不互质，那么，在实数域上 $f(x)$与 $p(x)$ 也不互质，于是，必有

$p(x)\mid f(x)$

12. x^3+px+q 的斯图姆组为：

$f_0(x)=x^3+px+q,$

$f_1(x)=3x^2+p,$

$f_2(x)=-2px-3q,$

$f_3(x)=-(4p^3+27q^2)$

（1）当 $4p^3+27q^2>0$ 时

x	f_0	f_1	f_2	f_3	$V(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	与 p 同号	$-$	2
∞	$-$	$+$	与 $-p$ 同号	$-$	1

（2）当$4p^3+27q^2<0$，则 $p<0$

x	f_0	f_1	f_2	f_3	$V(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

故当 $4p^3+27q^2>0$时有一个实根，当 $4p^3+27q^2<0$ 时，有 3 个实根。

13. 显然，$f(x)$ 无正根，且 $f(0)=1\neq0$，所以，只考虑在区间$(-\infty,\ -\varepsilon)$中的实根即可. 这里 ε 是充分小的正数.

又 $f(x)=f'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$，于是可取多项式组 $f(x)$，$f'(x)$，$-\dfrac{x^n}{n!}$，容易验证满足斯图姆组的四条性质，称为广义斯图姆组. 于是考查它在$(-\infty,\ -\varepsilon)$上的变号差

	n 为偶数				n 为奇数			
x	$f(x)$	$f'(x)$	$-\frac{x^n}{n!}$	$\nu(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$-\frac{x^n}{n!}$	$V(x)$
$-\infty$	+	−	−	1	−	+	+	1
$-\varepsilon$	+	+	−	1	+	+	+	0

所以，当 n 为偶数时，$f(x)$ 没有实根；当 n 为奇数时，$f(x)$ 有且只有一个实根。

14．（1）$k=0$ 时，显然

（2）$k>0$，或 $k<0(k\neq-1)$ 列表考查这两种情况下 $f(x)$ 的变号情况：

			$-\infty$	2	3	5	6	7	8	9	10	$+\infty$
$f(x)$	$k>0$			+	−	−	+	+	−	−	+	
	$k<0$	$k>-1$	+	−	−	+	+	−	−	+	+	+
		$k<-1$	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−

显然，无论 k 为何值($k\neq-1$)均有四个互异实根。

当 $k>0$ 时，$2<x_1<3$，$5<x_2<6$

$$7<x_3<8,\quad 9<x_4<10$$

当 $k<0$ 时，若 $k>-1$，则 $-\infty<x_1<2$

$3<x_2<5$，$6<x_3<7$

$8<x_4<9$

若 $k<-1$，则

$3<x_1<5$，$6<x_2<7$

$8<x_3<9$，$10<x_4<+\infty$

15．因 $bd+cd=(b+c)d$ 为奇数，故 $b+c$ 与 d 均为奇数．若 $f(x)$在有理数域上可约，那么 $f(x)$在整数环上也必可约，则因式中必有一次的．即

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r)$$

其中 p，q，r 都是整数，比较常数项得：$pr=d$，因 d 为奇数，故 p，r 也都是奇数，令 $x=1$，则

$$1+b+c+d=(1+p)(1+q+r)$$

显然，$1+b+c+d$ 为奇数，而 $1+p$ 为偶数，矛盾．故 $f(x)$在有理数域上不可约．

第三章　多元多项式

练　习　一

1．（1）$x_1^2x_2 - x_1^2x_4^5 + 5x_1x_3x_4^5 + x^3_2x_5 + x^6_3$，

（2）$x_1x^2_2 + x_1x_2x^2_3 + x_1x^3_3x^3_4 - x^3_2$

2．仿本章例题选讲“例 2”用数学归纳法证明，也可用“例 2”的结果反证，

3．如果 f，g 中有一个不是单项式．不妨令

$$f = ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n} + \cdots + bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

这里 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 是 f 的首项．$bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 是 f 的末项．$a\neq0$，$b\neq0$，于是

$$f\cdot g = ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\cdot g + \cdots + bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\cdot g$$

其中

$$ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}\cdot g$$

的首项一定高于

$$bx_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\cdot g$$

的末项，于是知 $f\cdot g$ 不是单项式，矛盾．

练　习　二

1．（1）含有此项，因为

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = \cdots + 3x_1x^3_2x_3^2x_4 + \cdots$$

故有

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cdots + 3x_1x_5^3x_3^2x_4 + \cdots$$

由 f 的对称性知

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f(x_1, x_5, x_3, x_4, x_2)$$

所以 f 中含有 $3x_1x^3{}_5x^2{}_3x_4$ 这一单项式。

而（2），（3），（4）却不一定含在 f 的项中。

2．$a(x_1{}^3 + x^3{}_2 + x^3{}_3) + b(x_1x^2{}_2 + x_1x^2{}_3 + x_2x_3{}^2 + x_2x_1^2 +$

$+ x_2x_3{}^2 + x_3x_1{}^2) + cx_1x_2x_3$。

3．是．首项为 $x_1{}^{15}x_2{}^{12}x_3{}^7$

4．（1）$\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$，

（2）$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$，

（3）$\sigma_3{}^2 + \sigma_3 + \sigma_1{}^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma^2{}_2 - 2\sigma_1\sigma_3$。

5．$-\dfrac{1679}{625}$。

练　习　三

1．（1）取 $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$，则有

$$g(x) = x^2 + 3x + 1$$

使得

$$g(\alpha_1) = \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1$$

而以 $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$ 为根的多项式可取

$$f(x) = x^3 - 2$$

在 $f(x)$ 中将因式 $x - \alpha_1 = x - \sqrt[3]{2}$ 分离出来，用综合除法

$$\begin{array}{r|cccc} \sqrt[3]{2} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & \sqrt[3]{2} & (\sqrt[3]{2})^2 & 0 \end{array}$$

即得

$$f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4})$$

$f(x)$ 的其余二根是二次多项式

$$\varphi(x) = x^2 + \sqrt[3]{2}\,x + \sqrt[3]{4}$$

的根．又因为

$$g(\alpha_2)g(\alpha_3)=(\alpha^2{}_2+3\alpha_2+1)(\alpha^2{}_3+3\alpha_3+1)$$

是关于 α_2，α_3，的对称多项式，从 $\varphi(x)$ 的系数知关于 α_2，α_3 的初等对称多项式是

$$\sigma_1=(\alpha_2+\alpha_3)=-\sqrt[3]{2}$$

$$\sigma_2=\alpha_2\alpha_3=\sqrt[3]{4}$$

从而有

$$\begin{aligned}
g(\alpha_2)g(\alpha_3)&=\alpha_2^2\alpha_3^2+3(\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2)+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)\\
&\quad+9\alpha_2\alpha_3+3(\alpha_2+\alpha_3)+1\\
&=(\alpha_2\alpha_3)^2+3\alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_2+\alpha_3)^2\\
&\quad-2\alpha_2\alpha_3+9\alpha_2\alpha_3+3(\alpha_2+\alpha_3)+1\\
&=\sqrt[3]{16}-3\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}\\
&\quad+1\\
&=8\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-5.
\end{aligned}$$

故得出

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}\\
=&\frac{(\sqrt{5}+2)(8\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-5)}{(\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1)(8\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{2}-5)}\\
=&\frac{(\sqrt{5}+2)(8\sqrt[3]{4}-3\sqrt{2}-5)}{41}.
\end{aligned}$$

（2）$1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$.

2．（1）$\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{3}$;

（2）$17\alpha^2-3\alpha+55$;

（3）$3-10\alpha+8\alpha^2-3\alpha^3$.

习　题　三

1．考虑

$$h(x_1, \cdots, x_n)=f(x_1, \cdots, x_n)\cdot g(x_1, \cdots, x_n)$$

于是知对任一组数$c_1, c_2, \cdots, c_n$有

$$h(c_1, \cdots, c_n)=f(c_1, \cdots, c_n)\cdot g(c_1, \cdots, c_n)=0$$

故得

$$h(x_1, \cdots, x_n)=0$$

如果$f(x_1, \cdots, x_n)\neq 0$，可令$f$的首项系数为$a$，$g$的首项系数为$b$，那么，$h$的首项系数为$ab\neq 0$。这与$h$是0多项式矛盾。故$f=0$。

2. （1）$\dfrac{\sigma_{n-1}^2-2\sigma_{n-2}\sigma_n}{\sigma_n^2}$，

（2）$\dfrac{\sigma_1\sigma_{n-1}-n\sigma_n}{\sigma_n}$。

3. （1）p^2-2q。

（2）q^2-pr。

4. 设三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$的三个根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，那么，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 成等差数列，必要且只要

$$(2\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)(2\alpha_2-\alpha_1-\alpha_3)(2\alpha_3-\alpha_1-\alpha_2)=0, \qquad (1)$$

又知

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a_1 \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=a_2 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-a_3 \end{cases} \qquad (2)$$

将（1）式左端关于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的对称多项式用其初等对称多项式（2）表出，则得

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0。$$

5. 令$g(x_2, \cdots, x_n)$是关于$x_2, \cdots, x_n$的对称多项式。于是存在多项式$h(y_2, \cdots, y_n)$使

$$g(x_2, \cdots, x_n)=h(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \cdots, \bar{\sigma}_{n-1}), \qquad (1)$$

其中$\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \cdots, \bar{\sigma}_{n-1}$是$x_2, \cdots, x_n$的初等对称多项式。但

$$\begin{cases}\bar{\sigma}_1=\sigma_1-x_1=-(a_1+x_1),\\ \bar{\sigma}_2=\sigma_2-x_1\sigma_1=a_2+a_1x_1+x_1^2,\\ \bar{\sigma}_3=\sigma_3-x_1\sigma_2=(-1)^3(a_3+a_2x_1+a_1x_1^2+x_1^3),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{\sigma}_{n-1}=(-1)^{n-1}(a_{n-1}+a_{n-2}x_1+\cdots+a_1x_1^{n-2}+x_1^{n-1})\end{cases}\qquad(2)$$

将（2）代入（1）可知 $g(x_2, \cdots, x_n)$能被 x_1 与 $a_1, \cdots, a_{n-1}$的多项式表出。

6.（1）由于

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

可得

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$$

从而得

$$\begin{aligned}x^{k+1}f'(x)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{x-x_i}f(x)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)\\ &=\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i^k)f(x)+g(x)\\ &=(nx^k+\sum_{i=1}^{n}x_ix^{k-1}+\cdots+\sum_{i=1}^{n}x_i^k)f(x)+g(x)\\ &=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x)\end{aligned}$$

其中$g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$，$\deg\ g(x)<n$。

（2）由于

$$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$$

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)f(x)+g(x)$$

可得

$$(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots$$

$$+(-1)^n\sigma_n)g(x)$$

$$=x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]$$

当 $k\leqslant n$ 时，比较等式 n 次项系数，由于 $\deg g(x)<n$，和等式左端 x^n 的系数为

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0$$

右端 x^n 系数为

$$(-1)^k(n-k)\sigma_k$$

即得

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k\sigma_ks_0$$

$$=(-1)^k(n-k)\sigma_k$$

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k(s_0-n+k)\sigma_k=0$$

因为，$s_0=n$，所以有

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$$

当 $k>n$ 时，右端 x^n 项系数为 0，左端

$$s_k-s_{k-1}\sigma_1+\cdots+(-1)^ns_{k-n}\sigma_n$$

所以，有

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$$

7．（1）当 $n\geqslant6$ 时，根据牛顿公式有

$$s_2-s_1\sigma_1+2\sigma_2=0$$

而 $s_1=\sigma_1$，所以有

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

同理解得

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_1^2-4\sigma_4$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma^2{}_2-6\sigma_1^2\sigma_4-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-6\sigma_6.$$

（2）当 $n=5$ 时，s_2，s_3，s_4，s_5 同前。而 s_6 为：

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

（3）当 $n=4$ 时，s_2，s_3，s_4，同（1）中结果，而 s_5，s_6 为

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma^3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3.$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2.$$

（4）当 $n=3$ 时，s_2，s_3 同（1）中结果，而 s_4，s_5，s_6 为

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3,$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2.$$

（5）当 $n=2$时，s_2 同（1）中结果。而 s_3，s_4，s_5，s_6 为

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2,$$

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2$$

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2-2\sigma_2^3.$$

第四章　消　元　法

练　习　一

1. 仿照命题的证明，将线性方程组的第 i 个方程乘以 $k(\neq 0)$，然后证明所得到的方程组与原方程组同解。

2.

（1）和（2）是显然的。

（3）传递性　若线性方程组（1）与（2）同解，（2）与线性方程组（3）同解时，则（1）与（2）的通解相等，（2）与（3）的通解相等，从而（1）与（3）的通解相等，即方程组（1）与方程组（3）同解。

练　习　二

1. （1）$x_1=-2, x_2=2, x_3=-3, x_4=3$

（2）$x_1=-2t_2+\frac{1}{2}t_4-\frac{3}{2}$

$x_3=\quad -\frac{1}{2}t_4+\frac{13}{6}$

$x_2=t_2$

$x_4=t_4$.

（3）无解。

（4）$x_1=\frac{3}{17}t_3-\frac{13}{17}t_4$，$x_2=\frac{19}{17}t_3-\frac{20}{17}t_4$，$x_3=t_3$，$x_4=t_4$.

2. 用分离系数法，写出方程组的表示矩阵，作行的初等变换，化其系数阵为B型阵，

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}(-3),P_{41}(-5)}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{23}(1),P_{43}(1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&a\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{13}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&0&0&0&0&a\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

由此得到：当且仅当$a=0,b=2$时，方程组有无穷多解。

3. 对齐次线性方程组的系数阵，作行的初等变换，化简为B型阵，这时，B中所出现的特殊列的个数r不会超过s，而$s<n$，所以有$r<n$。于是由本章§1定理可知，齐次线性方程组有无穷多个解，因而必有非0解。

4. (1)与(1)′的系数阵相同，而在$s=n$时，(1)有唯一解的充分必要条件是：(1)的表示矩阵可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & d_1 \\ 0 & 1 \cdots 0 & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & d_n \end{pmatrix}$$

即（1）的系数阵（亦即（1）′的系数阵）可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的形式.

而（1）的系数阵（亦即（1）′的系数阵）可化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

的形式，必要而且只要（1）′只有零解。

5．直接由定义即可证得.

练 习 三

1．略

2．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　（2）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AP_{12}(1)P_{23}\left(\frac{1}{5}\right)P_{12}(1)D_2\left(\frac{1}{5}\right)P_{23}(1)$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BP_{12}((1)P_{14}(-2)D_2\left(\frac{1}{5}\right)P_{21}(-3) \\ P_{23}(1)P_{24}(5)P_{43}\left(\frac{1}{2}\right)P_{31}(1)P_{34}(-2)$$

(3) 从略．

4．假定$m\times n$矩阵A的所有元素皆为0时，则为

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & d_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

的特例．

若A的元素不全为0时，则可作行的换法变换将A变为左上角元素（即第一行第一列元素）不为0的矩阵．然后作行的消法变换和列的消法变换，将第一行和第一列的所有元素，除去位于左上角的元素外都化为0；

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

如若打 * 号的元素都等于 0 时，已化为所要的形式，否则对打 * 号的元素，重复上面的作法。由于m和n是确定的自然数，所以有限次后即得所求。

5．先对$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$作消法变换，变为左上角元素等于 1 的矩阵，为此作初等变换如下：

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{12}(c)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{21}(1-c)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c^{-1}-1 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[P_{12}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-c^{-1}+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6．

（1）因为，$A \xrightarrow{P_{ij}(0)} A$，所以$A \longrightarrow A$；

（2）若 $A \xrightarrow{P_{ij}(k)} B$，则 $B \xrightarrow{P_{ij}(-k)} A$

若 $A \xrightarrow{D_i(k)} B$，则 $B \xrightarrow{D_i\left(\frac{1}{k}\right)} A$

所以，当对A的行连续作若干次初等变换化为B时，由上述对B作若干次初等变换即可化为A．即，若$A \longrightarrow B$，则必有$B \longrightarrow A$。

（3）是显然的。

习 题 四

1．指出对A的行作初等变换，可将第 1 行换到第n行；第 2 行换到第$n-1$行…，第n行换到第 1 行即得证。

2．对行作消法变换，将最后一行移到第 1 行，其余各行次序不变（指出元素可能差一负号）．

3．因为矩阵A的右上角和左下角的元素都为 0，根据A_1与B_1相抵，A_2与B_2相抵，即可证明A与B相抵。

4.

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-1),\ P_{31}(-1),\ P_{41}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & cd(a-b) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bd(a-c) \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & bc(a-d) \end{pmatrix}$$

（a）当 $a=b=c=d$ 时，

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（b）当 a，b，c，d 中有三个相同，不妨设为：$a \neq b=c=d$，这时

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a_2 & b^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^2(a-b) \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^2(a-b) \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^2(a-b) \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}(-1)P_{42}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & b^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^2(a-b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（c）在 a，b，c，d 中有两组相等，不妨设：

$a=b$，$c=d$ 而 $a \neq c$。

则

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{43}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C[2,3]}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（d）在 a，b，c，d 中只有一组相等，不妨设 $c=d$，$a\neq b$
则

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & a-b & b^2-a^2 & c^2(a-b) \\ 0 & b-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{43}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & c^2(a-b) \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bc(a-c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{32}\left(-\frac{c-a}{b-a}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & bc^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & c^2(a-b) \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & c(c-a)(c-b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（e）当 a，b，c，d 皆不相等时，则

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & bcd\\ 0 & b-a & b^2-a^2 & cd(a-b)\\ 0 & c-a & c^2-a^2 & bd(a-c)\\ 0 & d-a & d^2-a^2 & bc(a-d)\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{32}\left(\frac{c-a}{a-b}\right),\ P_{42}\left(\frac{d-a}{a-b}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & bcd\\ 0 & b-a & b^2-a^2 & cd(a-b)\\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & d(c-a)(c-b)\\ 0 & 0 & (d-a)(d-b) & c(d-a)(d-b)\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{43}\left(\frac{(a-d)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & a^2 & bcd\\ 0 & b-a & b^2-a^2 & cd(a-b)\\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & d(c-a)(c-b)\\ 0 & 0 & 0 & (d-a)(d-b)(c-d)\end{pmatrix}$$

（2）

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\cdots a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2\cdots a_2b_n\\ \cdots & \cdots\cdots\\ a_mb_1 & a_mb_2\cdots a_mb_n\end{pmatrix}\xrightarrow{P_{21}\left(-\frac{a_2}{a_1}\right),\ P_{31}\left(-\frac{a_3}{a_1}\right),\ \cdots,\ P_{m1}\left(-\frac{a_m}{a_1}\right)}$$

$$\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\cdots a_1b_n\\ 0 & 0\cdots 0\\ \cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots 0\end{pmatrix}.$$

5.

（1）若 $a=b$ 时

则

$$A=\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{21}(-1),P_{31}(-1),P_{41}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{12}(-1),P_{13}(-1),P_{14}(-1)]{}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $a=0$ 时，则

$$A\text{的标准形为：}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $a\neq 0$，则

$$A\to\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_1\left(\frac{1}{a}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

若 $a\neq b$，则

$$A\xrightarrow{P_{12}(1),P_{13}(1),\ P_{14}(1)}\begin{pmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}=A_1$$

当 $a+3b\neq 0$ 时，则

$$A\to A_1 \xrightarrow{D_1\left(\frac{1}{a+3b}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[P_{12}(-1),P_{13}(-1),P_{14}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 & 0 \\ b & 0 & a-b & 0 \\ b & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{21}(-b),P_{31}(-b),P_{41}(-b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{a-b}\right),\ D_3\left(\frac{1}{a-b}\right),\ D_4\left(\frac{1}{a-b}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

当 $a+3b=0$，则

$$A\to A_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \xrightarrow[P_{14}(1),P_{24}(1),\ P_{34}(1)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ b & b & a & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{24}(-1),P_{34}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C[1,4]}\begin{pmatrix} b & b & b & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{P_{12}(-1),P_{13}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因为，在 $a\neq b$，$a+3b=0$ 的条件下，可知 $b\neq 0$。否则，若 $b=0$，则由 $a+3b=0$，必有 $a=0$。

于是

$$A\rightarrow\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{D_1\left(\frac{1}{b}\right),\ D_2\left(\frac{1}{a-b}\right),\ D_3\left(\frac{1}{a-b}\right)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）若 $a=1$ 时，则

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

若 $a\neq 1$ 时，将 B 的所有各列都加到第 n 列上，则

$$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & a & \cdots & a & (n-1)a+1\\ a & 1 & \cdots & a & (n-1)a+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & a & (n-1)a+1\end{pmatrix}$$

然后就$(n-1)a+1=0$和$(n-1)a+1\neq0$两种情形去讨论。

当$(n-1)a+1=0$ 时，则

$$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当$(n-1)a+1\neq0$ 时，则

$$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

6．

（1）$b=16$时有无穷多个解．

（2）$a\neq-1$时有唯一解；$a=-1,b\neq-1$时无解；$a=b=-1$时有无穷多个解。

7．

设所作的消法变换为：把第j行的k倍加到第i行上。

先去证明：可通过作相邻两行的消法变换把第j行换到第$i+1$行的位置(元素可能差一负号)，然后把第$i+1$行的k倍(即原来的第j行）加到第i行上．最后，再通过作相邻两行的消法变换把第$i+1$行（即原来给定的阵的第j行）换回到第i行的位置。

第五章 行 列 式

练 习 一

1．（1） 0；（2） -1；（3） $4ab$；（4） 1．

2．（1） $x_1=2, x_2=-\frac{7}{2}$；

（2） $x_1=a\cos\alpha+b\sin\alpha$，$x_2=b\cos\alpha-a\sin\alpha$；

（3） $x_1=0$，$x_2=0$．

3．（1） -18；（2） 5；（3） 2；

（4） $x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3$；

（5） $(a-b)(b-c)(c-a)$．

4．（1） $x_1=-4$，$x_2=11$，$x_3=-6$；

（2） $x_1=9$，$x_2=-1$，$x_3=-6$．

练 习 二

1．（1） 7；（2） 6；（3） $\frac{n(n-1)}{2}$；

2．（1） $i=8$，$j=3$；（2） $i=3$，$j=6$．

3．

因为大于 k 不超过 n 的自然数共有 $n-k$ 个，所以在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果在 k 之前有 m_k 个大于 k 的自然数，那么在 k 之后大于 k 的自然数的个数就是：$(n-k)-m_k$ 个。

因此，排列$i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1$ 中在 k 之前大于 k 的自然数有 $(n-k)-m_k$个。

因为

$$\tau[i_1 i_2\cdots i_{n-1} i_n]=m_1+m_2+\cdots+m_n=t$$

所以

$$\begin{aligned}\tau[i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1]&=[(n-1)-m_1]+[(n-2)-m_2]+\cdots\\&\quad+[1-m_{n-1}]+[0-m_n]\\&=[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1)]-(m_1+m_2+\cdots\\&\quad+m_{n-1}+m_n)\\&=\frac{n(n-1)}{2}-t.\end{aligned}$$

4. 从略

5. 设排列$i_1 i_2\cdots i_n$中排在 k 之前比 k 大的数码有 m_k 个时，则 $\tau[i_1 i_2\cdots i_n]=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

当将 $i_1 i_2\cdots i_n$ 化为自然排列时，由于排在 1 之前的数码个数为 m_1 个，所以把排列 $i_1 i_2\cdots i_n$中的 1 经过 m_1 次相邻数码的对换，即可把 1 排在最前边.由于已经把 1 换到排列的第一个数码的位置,所以可把 2 经过 m_2 次相邻数码的对换，换到排列的第二个数码的位置。逐次作下去，可把 k 经过 m_k 次相邻数码的对换换到排列的第 k 个数码的位置。依次作下去，则排列$i_1 i_2\cdots i_n$ 可经过

$$m_1+m_2+\cdots+m_n=\tau[i_1 i_2\cdots i_n]$$

次对换化为自然排列。

6. 因为在排列 $1\,i_2 i_3\cdots i_n$ 中排在数码 $k\,(>1)$之前大于 k 的个数m_k，等于在排列$i_2 i_3\cdots i_n$中排在 k 之前大于 k 的数码个数。

而每个 $i_k(k\geqslant 2)$都大于 1 ,所以$(i_2-1)(i_3-1)\cdots(i_n-1)$是1，2，…，$n-1$的一个排列。但是，在排列 $(i_2-1)(i_3-1)\cdots(i_n-1)$中，排在$(k-1)$之前大于$(k-1)$的数码个数等于 k 在排列：$1\,i_2 i_3\cdots i_n$ 中排在 k 之前大于 k 的数码的个数，也是 m_k。

所以有

$$
\begin{aligned}
\tau[1i_2i_3\cdots i_n] &= m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n\\
&=0+m_2+m_3+\cdots+m_n\\
&=\tau[(i_2-1)(i_3-1)\cdots(i_n-1)].
\end{aligned}
$$

练 习 三

1. $a_{13}a_{2i}a_{32}a_{4k}$ 当 $i=1$，$k=4$时，该项符号取＋；

$a_{11}a_{22}a_{3i}a_{4k}$ 当 $i=3$，$k=4$时，该项符号取＋；

$a_{i2}a_{31}a_{43}a_{k4}$ 当 $i=1$，$k=2$时该项符号取－。

2. （1）有两个第1列元素，所以不是五阶行列式的项；

（2）是五阶行列式的项，符号取＋；

（3）不是五阶行列式的项；

（4）是行列式的项，符号取－。

3. 四阶行列式中含a_{23}的项必为下列形式：

$a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$，其中 $i\ j\ k$ 取1，2，4的一个排列。

当 $i=1$，$j=2$，$k=2$ 时该项的符号取；－；

$i=2$，$j=4$，$k=1$ 时该项的符号取－；

$i=4$，$j=1$，$k=2$ 时该项的符号取－。

对于其它情形，符号取＋．所以，上列三种情形所决定的项即为四阶行列式中含a_{23}符号取－的所有项。

4. （1）由于此行列式中只有n个元素不为0，而且位于不同、行不同列上．所以此行列式不为0的项只有：$1\cdot2\cdot3\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!$一项。

而这一项的符号由排列$2\,3\cdots n1$ 的反序数（$n-1$）的奇偶性决定。所以，$D_1=(-1)^{n-1}n!$

（2） $D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$

（3）仿命题1证明。 $D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$.

5．由行列式定义五阶行列式的项，是由位于不同行、不同列5个元素之积构成的，所以行列式D的每一项一定含位于不同列的第3、第4、第5行的元素．但是，D的第3、第4、第5行的非0元素只位于不同的两个列上，所以，D中的每一项至少含一个0作为因子，故$D=0$。

6．n阶行列式D中的元素共为n^2个，当D中元素等于0的个数多于n^2-n时，则D中不等于0的元素个数少于$n^2-(n^2-n)=n$个。

由行列式定义，D中的项为位于D中不同行、不同列n个元素之积。所以D的每一项至少要含一个0作为因子，故$D=0$。

7．x^4的系数等于2；x^3的系数等于-1。

8．指出：$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$中除对角线上诸元素外都为0，所以此行列式除去项：$a_1a_2\cdots a_n$外，其余各项至少含一个0为因子。故其值等于：$(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_1a_2\cdots a_n=a_1a_2\cdots a_n$

9．（1）因为A是3行4列矩阵，所以要找出A的所有3阶子式，只须从A的4个列中取3个列，把一切可能的情形都列举出来，然后组成3阶子式，即得A的所有3阶子式．其个数为C_4^3。而从4个列中每次取不同的3个列的一切情形为：

1、2、3列；1、2、4列；1、3、4列；2、3、4列。

于是，取A的所有3个行再依次按上述四种情形取3个列，即得A的所有3阶子式。

（2）先把从B中取三个不同行的一切可能情形列出，然后仿（1）就每种情形作出B的所有3阶子式。

10．一个$m\times n$矩阵共有$C_m^k\cdot C_n^k$个k阶子式。

练 习 四

1. （1）-29400000 （2） 1 （3） 48 （4） x^2y^2 （5） 665

（6） $[x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$

（7） $(a-a_1)(a-a_2)\cdots(a-a_{n-1})$

2. （1） 按1、2、3行展开计算，得值：128。

（2） 按1、2、6行展开，得值：$(x_2-x_1)^2(x_3-x_1)^2(x_3-x_2)^2$

3. （1） 应用本节命题1将左端按第1列展开，写为二行列式之和，然后化简之。

（2） 应用消法变换化简，使之成为一个含有两列或两行相等的行列式。

4. 应用消法变换使第3列化为：204，527，255去作证明。

5. （1） $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d$

（2） 0

6. 设k阶子式是由$i_1,i_2,\cdots,i_k$行；$j_1,j_2,\cdots,j_k$列构成，M的余子式$\overline{M}$是由$i_{k+1},\cdots,i_n$行；$j_{k+1},\cdots,j_n$列构成。则由子式M与其余子式$\overline{M}$的关系可知：

$$i_1+i_2+\cdots+i_k+i_{k+1}+\cdots+i_n=1+2+\cdots+n$$

$$j_1+j_2+\cdots+j_k+j_{k+1}+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n$$

则 $S_M+S_{\overline{M}}=2\times(1+2+\cdots+n)=$偶数。

所以，S_M与$S_{\overline{M}}$奇偶性相同。

7. 根据行列式展开定理，若n阶行列式不等于0，则它的所有$n-1$阶子式，进一步所有$k(<n)$阶子式不能都等于0。

8. 二者都能作到。

9. （1） 33 （2） 0

（3） 把第2、3、…、n列的1倍都加到第1列然后化简，得值：$(-1)^{n-1}(n-1)$。

（4）把第3行的（-1）倍依次加到其余各行．然后化简，得值：$6(n-3)!$

（5）把第2、3、…、n列的1倍都加到第1列化简，得值：

$$(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$$

（6）把第2、3、…、n列的1倍都加到第1列，然后按第1列展开，再重复上述手续，得值：$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$．

（7）将第1行的1倍加到第2行，然后把第2行的1倍加到第3行，…，把第$n-1$行的1倍加到第n行上，得值：1．

（8）将第一行与第一列都乘以x，然后把第n行的-1倍分别加到前$n-1$个行上，得到：

$$\frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} -x & 0 & 0\cdots 0 & x \\ 0 & -x & 0\cdots 0 & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots -x & x \\ x & x & x\cdots\ x & 0 \end{vmatrix}$$

然后将前$n-1$个列的1倍都加到第n列上化简，得值：

$(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$．

（9）解法Ⅰ按第1列展开，并指出：

$D_{2n}=(a^2-b^2)D_{2n-2}$，继续作下去，得值：

$D_{2n}=(a^2-b^2)^n$．

解法Ⅱ　应用拉普拉斯定理，按第n、第$n+1$行展开（或第1、第$2n$行展开）计算之．

（10）从第n列开始，依次把后一列的x倍加到前一列上，再按第1列展开，得值：

$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$．

（11）把第2列的$-\frac{1}{a_1}$倍，第3列的$-\frac{1}{a_2}$倍，…，第$n+1$列

的$-\frac{1}{a_n}$倍都加到第1列上，化简为上三角形行列式，得值：

$$-a_1a_2\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

（12）把行列式Δ_n表成二行列式之和的形式，并证明：

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$$

$$\Delta_n=1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+\cdots+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

10．（1）应用数学归纳法作证明

（a）$n=2$结论成立；

（b）假定对$n-1$结论成立，去证对于n结论成立．为此，将n阶行列式D_n的最后一列，写成二数之和的形式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\cdots 0 & 0+0 \\ 1 & 2 & 1\cdots 0 & 0+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 2 & 1+0 \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & 1+1 \end{vmatrix}$$

然后得到：

$$D_n=1+D_{n-1}$$

最后应用归纳假定，即得：

$$D_n=1+n$$

（2）应用第二数学归纳法作证明．

$n=2$时可以验证结论成立．假定对于一切$<n$的情形结论成立，去证对于n结论成立．

为此，将n阶行列式D_n按第一行展开之，得到：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

然后应用归纳假定，将D_{n-1}，D_{n-2}的值代入上式，整理之即得证。

练　习　五

1．根据矩阵的秩的定义给出答案。

2．先从1 0 1 0 0和1 －1 0 0 0为两行组成一个秩为4的4×5矩阵，然后再取其中任意二行的k倍添加到所作的4×5矩阵上，即得一秩为4的6×5矩阵。

3．（1）2；（2）2；（3）3；（4）4．

4．从略。

5．先应用初等变换将A和B化为标准形．然后将上述的初等变换对矩阵C作用，然后指出：$rankC = rankA + rankB$。

6．应用行列式的展开定理去说明。

7．当A不是零阵，即A中致少有一元素$a_{ij}\neq 0$，然后将n阶方阵A的行列式按第i行展开作证明。

8．充分性是显然的。

当A的秩为0或1时，则根据矩阵的秩的定义，A的一切二阶子式必都等于0，由此导出A的任意两行，任意两列必成比列．由此即可得出：$a_{ij}=a_ib_j$，$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$．必要性得证。

习　题　五

1．由行列式的定义，四阶行列式中项的一般形式为：

$$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$$

因为题设的行列式D的第一行元素除a_{11}、a_{14}外都为0，所以D中不为0的项只能是下面两种情形：

$$i_1=1：a_{11}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} \qquad (1)$$

$$i_1=4：a_{14}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4} \qquad (2)$$

然后再就（1）和（2）找出D中不等于0的项．由于（1）

形的项已有第1列元素，所以（1）形的项中，$i_2 \neq 1$. 而在给定的D中，第二行元素除a_{22}，a_{23}外都为0，所以不等于0的（1）形的项中的i_2，只能取2和3．因此，（1）形的不等于0的项只有下边两种情形：

$$a_{11}a_{22}a_{3i_3}a_{4i_4} \tag{3}$$

$$a_{11}a_{23}a_{3i_3}a_{4i_4} \tag{4}$$

因为（3）形的项中已有第1列和第2列元素，所以在（3）中i_3只能取3和4．但是在D中的第三行元素中a_{34}等于0，所以D中（3）形的不等于0的项只能是：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{4i_4}$. 由行列式定义，$i_4$必须取4．所以，（3）形的不等于0的项只有一个：$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$.

同理可以推出，（4）形的不等于0的项也只有一个：$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

于是，（1）形的不等于0的项，只有上述两项.

用同样方法可以推出（2）形的不等于0的项只有两个：$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$，$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

然后再确定上述四项的符号，即得：

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}.$$

2．（1）把后$n-1$个行的1倍都加到第一行上，然后化简，值为：$(a+4b)(a-b)^4$.

（2）对行作倍法变换：用$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$，$\frac{1}{d}$分别乘第1、2、3、4各行，然后化简，值为：$a^2+b^2+c^2+d^2+1$.

（3）对列作倍法变换：用$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}\cdots$，$\frac{1}{a_n}$分别乘n个列，得到：

$$原式=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 1+\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & \frac{1}{a_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n}\end{vmatrix}$$

然后对上式的行列式的列作消法变换：把后$n-1$个列的 1 倍都加到第 1 列上，然后化简，值为：

$$(a_1a_2\cdots a_n)\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

3．将D_n按第一行展开，则得：

$$D_n=(1+x^2)D_{n-1}-x^2D_{n-2}$$

即 $D_n-D_{n-1}=x^2(D_{n-1}-D_{n-2})$.

反复应用上述结果，得到：

$$D_n-D_{n-1}=x^{2(n-1)}(D_2-D_1)=x^{2n}$$

所以，$D_n=D_{n-1}+x^{2n}$

从而，$D_n=x^{2n}+x^{2(n-1)}+\cdots+x^2+1$.

4．（1）对列作消法变换化简，从第 1 列开始作消法变换：（i 列）$+(-a_i)\times(n+1)$列，$i=1,2,\cdots,n$. 得值为：

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

（2）对列作消法变换：把前 n 个列都加到第$n+1$列上，然后提出因子：$(x+a_1+\cdots+a_n)$，化简为本题（1）的形式，值为：$(x+a_1+\cdots+a_n)(x-a_1)\cdots(x-a_n)$.

（3）对列作倍法变换：用$\frac{1}{x_i}$乘第 i 列，$i=1,2,\cdots,n$. 然后作列的消法变换：把后$n-1$个列都加到第 1 列上，再按第 1 列展开．值为：$x_1x_2\cdots x_n\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right)$.

5. （1）将左端的行列式化简为上三角形行列式，得到方程：$-x(1-x)(2-x)\cdots(n-2-x)=0$

于是得到方程的根为：$0,1,2,\cdots,n-2$。

（2）仿（1）化简左端的行列式为上三角形．求得方程的 $n-1$ 个根为：$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$。

6. 应用本章§3命题1，将 $f(x+1)-f(x)$ 写为一个 $n+1$ 阶行列式，然后对行作消法变换化简，值为 $(n+1)!x^n$。

7. （1）对列作消法变换：从第1列开始，把前一列加到后一列上，化简为下三角形行列式，值为 $(-1)^n(n+1)a_1a_2\cdots a_n$。

（2）对列先作倍法变换，用 $\frac{1}{h}$ 乘第1列，然后把第1列加到第2列上化简，重复上述手续，得值为：$h(x+h)^n$。

8. 对列作消法变换：依次把第 i 列的1倍加到第 $n+i$ 列上，$i=1,2,\cdots,n$，化简。

9. （1）参看第四章习题四之4（2）

（2）参看第四章习题四之5（1）

（3）参看第四章习题四之5（2）

（4）参看第四章习题四之4（1）

10. 仿照本章学习指导例题选解之9作证明。

第六章　线性方程组的理论

练　习　一

1．（1）有唯一解；（2）有无穷多个解；（3）无解．

2．（1）没有非0解；（2）有非0解．

3．（1）a）$\lambda\neq1,-2$ 时有唯一解；b）$\lambda=1$时有无穷多个解；c）$\lambda=-2$时无解．

（2）a）$b\neq0$，$a\neq1$ 时有唯一解；b）$a=1,b=\frac{1}{2}$时，有无穷多个解；c）其余情形无解．

4．只须指出系数阵A的秩数≤表示矩阵$\overline{A}$的秩≤C的秩，然后，由$\text{rank}A=\text{rank}C$,即可得：$\text{rank}A=\text{rank}\ \overline{A}$．

5．对方程组的表示矩阵的行作初等变换化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i \end{pmatrix}$$

作证明．

6．根据线性方程组有解，必须$\text{rank}A=\text{rank}\ \overline{A}$，而 $\text{rank}A<n+1$，由此即得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+11} & a_{n+12} & \cdots a_{n+1n} & b_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

表示矩阵的秩为 2，系数阵的秩为 1 的含两个未知数、三个方程的线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

满足条件：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

但没有解.

7．因为线性方程组（*）对于任意 n 个数：$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 总有解必要而且只要系数阵 A 的秩数等于 A 添加任意一列后的秩数，为此去证明：A 添加任意一列后秩数不变必要而且只要 $\det A \neq 0$.

8．充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

9．写出圆的方程：$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$，然后将点：$M_1(x_1, y_1)$，$M_2 = (x_2, y_2)$，$M_3(x_3, y_3)$，$M_4(x_4, y_4)$ 代入，得到含 a，b，c 为未知数的线性方程组：

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0 \\ x_4^2 + y_4^2 + ax_4 + by_4 + c = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

由此导出四点：M_1，M_2，M_3，M_4在同一圆上的条件是：

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

10. 因为平面π_1,π_2,π_3所确定的线性方程组的秩为2，所以π_1，π_2，π_3共线。

练　习　二

1. （1）$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，$x_4=-1$。

（2）
$$\begin{cases} x_1=\frac{19}{8}k_3+\frac{3}{8}k_4-\frac{1}{2}k_5 \\ x_2=\frac{7}{8}k_3-\frac{25}{8}k_4+\frac{1}{2}k_5 \\ x_3=k_3 \\ x_4=k_4 \\ x_5=k_5 \end{cases}$$

（3）
$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{7}-\frac{11}{7}k_3 \\ x_2=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}k_3+2k_4 \\ x_3=k_3 \\ x_4=k_4 \end{cases}$$

（4）系数阵的秩等于2，所以当$a=0$，$b=2$时有无穷多个解：

$$\begin{cases} x_1=-2+k_3+k_4+5k_5 \\ x_2=3-2k_3-2k_4-6k_5 \\ x_3=k_3 \\ x_4=k_4 \\ x_5=k_5 \end{cases}$$

其余情形无解。

2．设所求的二次多项式

$$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

然后由题设：$f(1)=1$，$f(-1)=9$，$f(2)=3$ 列出线性方程组：

$$\begin{cases}a_2+a_1+a_0=1\\a_2-a_1+a_0=9\\4a_2+2a_1+a_0=3\end{cases}$$

解之，得$f(x)=2x^2-4x+3$。

3．设所求的多项式：$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$由题设：$f(a_i)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n+1$得到一个以

$$D=\begin{vmatrix}a_1^n & a_1^{n-1}\cdots a_1 & 1\\a_2^n & a_2^{n-1}\cdots a_2 & 1\\\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}\cdots a_{n+1} & 1\end{vmatrix}$$

为系数行列式，含 c_n，c_{n-1}，$\cdots,c_1,c_0$ 为未知数的线性方程组：

$$\begin{cases}c_na_1^n+c_{n-1}a_1^{n-1}+\cdots+c_1a_1+c_0=b_1\\c_na_2^n+c_{n-1}a_2^{n-1}+\cdots+c_1a_2+c_0=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\c_na_{n+1}^n+c_{n-1}a_{n+1}^{n-1}+\cdots+c_1a_{n+1}+c_0=b_{n+1}\end{cases}$$

因为D为范德蒙行列式，而且a_1，a_2，$\cdots$，a_{n+1} 为两两不同的$n+1$个数，故有$D\neq0$。

从而 c_i 唯一确定，即存在唯一一个次数不超过n 的多项式 $f(x)$，满足题设条件。

4．若$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 为 $f(x)$的$n+1$个不同的根，则有

$$\begin{cases}a_0+a_1a_1+\cdots+a_na_1^n=0\\a_0+a_1a_2+\cdots+a_na_2^n=0\\\quad\vdots\\a_0+a_1a_{n+1}+\cdots+a_na_{n+1}^n=0\end{cases}\qquad(*)$$

上式说明：a_0，a_1，…，a_n 是以范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \cdots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 \cdots & \alpha_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_{n+1} \cdots & \alpha_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

为系数行列式的齐次线性方程组的解。

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 两两不同，可知$D\neq 0$，于是齐次线性方程组（*）只有零解，即得：

$$a_0=a_1=\cdots=a_n=0$$

所以，$f(x)$是零多项式。

练 习 四

1．（1）$\alpha=(2,-10,4,3)$；（2）$\alpha=(1,2,3,4)$。

2．（1）$\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$

（2）$\beta=1\alpha_1+0\alpha_2+(-1)\alpha_3+0\alpha_4$

3．（1）线性无关；（2）线性相关。

4．（1）不一定；（2）必线性无关。

5．不一定。

例如，令 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(0,0,1);\beta_1=(2,0,0)$，$\beta_2=(0,2,0),\beta_3=(0,0,2)$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 满足题设条件：

若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$

将α_i和β_i具体代入上式，可知上式成立，必须：$k_1=k_2=k_3=0$。但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 是线性相关的向量组。

又如，取 $\alpha_1=(1,0,0,0),\alpha_2=(0,1,0,0)$；$\beta_1=(0,0,1,0)$，$\beta_2=(0,0,0,1)$时，则 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 满足题设要求：

若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_1\beta_1+k_2\beta_2=\theta$

必有 $k_1=k_2=0$。

而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 是线性无关的，但这组向量的线性无关性，并不是由上面的推导得知的。

而应由下面的推导得出：

若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\beta_1+k_4\beta_4=\theta$

必有：$k_1=k_2=k_3=k_4=0$。

6．（1）不真。

（2）真。

7．不一定。

8．令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的分量矩阵为A_1，则由本章§4定理3知：$\mathrm{rank}A_1=r$。从而可知 $\overline{\alpha_1}$，$\overline{\alpha_2}$，…，$\overline{\alpha_r}$ 的分量矩阵A的秩也为 r．这是因为A的前k行即为A_1，而A只有 r 个列。

由此应用本章§4定理3可知：$\overline{\alpha_1}$，$\overline{\alpha_2}$，…，$\overline{\alpha_r}$也线性无关。

另法。

若 $k_1\overline{\alpha_1}+k_2\overline{\alpha_2}+\cdots+k_r\overline{\alpha_r}=\theta$，去证$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$。

为此，将$\overline{\alpha_i}$具体代入上式，整理后，去讨论以$\overline{\alpha_i}$的分量所组成的阵为系数阵的齐次线性方程组。由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$是线性无关的，指出上面的齐次线性方程组只有唯一的零解，导出：

$k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_r=0$。

9．应用本章§4定理4．先写出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的分量矩阵 A，然后计算A的秩，得到：$\mathrm{rank}A=3$．则A中任一非0的三阶子式（即A的基础子式）所确定的三个列即为一个极大线性无关组．如$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$即为一个极大线性无关组。

10．（1）指出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可被向量组β_1，β_2，…，β_m，δ_1，$\delta_2,\cdots,\delta_m$ 线性表示；

（2）指出$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$可被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$线性表示；

（3）指出$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$可被向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性表示。

11．应用上题的结论：

12．（1）$\alpha_1=(0,0,0,1,1)$

（2）$\alpha_1=\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},1,\ 0,\right)$

$\alpha_2=\left(\frac{7}{8},\ \frac{5}{8},\ -\frac{5}{8},\ 0,\ 1,\ \right)$

13．是，为此须证：

1）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$是原齐次线性方程组的解；

2）$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_3$，线性无关。

14．（1）$(8,0,0,-10)+k_1(-9,1,0,11)$
$+k_2(-4,0,1,5)$

（2）$(-16,23,0,0,0)+k_1(1,-2,1,0,0)$
$+k_2(1,-2,0,1,0)+k_3(5,-6,0,0,1)$

习　题　六

1．应用本章§4定理3，指出$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的分量矩阵与$\alpha_1{}',\alpha_2{}',\cdots,\alpha_s{}'$的分量矩阵有相同的秩数。

2．考虑向量等式：

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{s-1}\beta_{s-1}=\theta \qquad (*)$$

将　$\beta_i=\alpha_i+k_i\alpha_s$，$i=1,2,\cdots,s-1$，代入上式，然后应用题设：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$，$\alpha_s$线性无关，推出（*）式成立，必须$k_i=0$，$i=1,2,\cdots,s-1$即可。

3．考虑向量等式：

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{s-1}\alpha_{s-1}+k_s\alpha_s=\theta \qquad (*)$$

应用反证法先证$k_s=0$，再证$k_{s-1}=0$，…，依次推下去，得到（*）式成立，必须$k_i=0$，$i=1,2,\cdots,s$。

另法．对s作数学归纳法。

4．用A_{ik}乘β_i，$i=1,2,\cdots,s$然后相加，得到：

$A_{1k}\beta_1+A_{2k}\beta_2+\cdots+A_{sk}\beta_s$

$$= (a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{sk}A_{sk})\alpha_k$$

由题设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1s} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}\cdots a_{ss} \end{vmatrix} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{sk}A_{sk} \neq 0$$

即得

$$\alpha_k = \frac{A_{1k}}{D}\beta_1 + \frac{A_{2k}}{D}\beta_2 + \cdots + \frac{A_{sk}}{D}\beta_s, \quad k = 1, 2, \cdots s.$$

5．只须证向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的秩等于 s 即可．因为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（Ⅰ）可被向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$（Ⅱ）线性表示，所以，由本章§4定理6，向量组（Ⅰ）的秩≤向量组（Ⅱ）的秩．由题设向量组（1）线性无关，所以向量组（Ⅰ）的秩等于 s．由此知，向量组（Ⅱ）的秩≥ s．而向量组（Ⅱ）只有 s 个向量，故知向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的秩等于 s．

6．令α_{j_1}，…，α_{j_k}为向量组α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_m}的极大线性无关组，则由本章§4定理3的推论2，将 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}$补充为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的极大线性无关组：

$$\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}, \alpha_{j_{k+1}}, \cdots, \alpha_{j_r} \qquad (*)$$

由此可知，在$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}$ 中一定有$m-k$个向量不在（*）中．（如果不是这样，则$\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}$就是原向量组的极大线性无关组，从而 α_{i_1}，…，α_{i_m} 的秩等于 r，于是，显然有 $r \geq r + m - s = r - (s - m)$．

令它们是：$\alpha_{t_1}, \cdots, \alpha_{t_{m-k}}$

于是得到：

$$\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_k}, \alpha_{j_{k+1}} \cdots, \alpha_{j_r}, \alpha_{t_1}, \cdots, \alpha_{t_{m-k}}$$

是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的部分向量组，从而有

$$r + m - k \leq s, 即 k \geq r + m - s.$$

7．（1）因为向量等式

$$k_1\alpha_{i_1} + \cdots + k_r\alpha_{i_r} = \theta \qquad (1)'$$

可表为：

$$0\alpha_1+\cdots+k_1\alpha_{i_1}+\cdots$$
$$+k_r\alpha_{i_r}+\cdots+0\alpha_s=\theta \tag{1}$$

由题设，（1）成立必要而且只要

$$0\beta_1+\cdots+k_1\beta_{i_1}+\cdots$$
$$+k_r\beta_{i_r}+\cdots+0\beta_s=\theta \tag{2}$$

成立。而（2）可表为下面的形式：

$$k_1\beta_{i_1}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=\theta \tag{2'}$$

亦即(1)′成立必要而且只要(2)′成立。（所以，$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性相关必要而且只要$\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性相关。

（2）仿（1）的证明。

8．因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，所以它的分量矩阵 A_1 的秩等于 r，于是在 A_1 中有一 r 阶子式不等于 0 。故可在A_1的 r 个列后面再添加$n-r$列，得到一个秩为 n 的 n 阶方阵A。

于是，取A的后$n-r$列为分量得到$n-r$个 n 维向量：$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，则由本章 § 4 定理 3 可知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 线性无关。

另法．取$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$考虑：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\ \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$　　（$*$）

可知（$*$）的秩为 n，所以（$*$）的极大线性无关组含 n 个向量。

应用本章 § 4 定理 3 之推论 2，可将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 补充为（$*$）的一个极大线性无关组：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\varepsilon_{i_{r+1}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$$

这样．用上述两种方法证明了，在$F^{(n)}$中能找到 $n-r$ 个向量：$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 使：

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$$

线性无关。

其次证明，$F^{(n)}$ 中每个向量 β 都可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 线性表示。

为此，只须证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关即可。

由本章§4定理3推论1知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n,\beta$ 必线性相关。

9．利用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的后$n-1$个分量作如下n个$n-1$维向量：

$$\alpha_1'=(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n})$$

$$\alpha_2'=(a_{22},a_{23},\cdots,a_{2n})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_n'=(a_{n2},a_{n3},\cdots,a_{nn})$$

则由本章§4定理3之推论1知：$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'$ 必线性相关，于是有n个不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使

$$k_1\alpha_1'+k_2\alpha_2'+\cdots+k_n\alpha_n'=\theta$$

从而

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_na_{n1},0,\cdots,0)$$

因为$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为0，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以 $k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_na_{n1}\neq 0$。

取 $k_1a_{11}+k_2a_{21}+\cdots+k_na_{n1}=c$，即得证。

10．（1）先指出

若 $l_0\gamma_0+l_1\gamma_1+\cdots+l_{n-r}\gamma_{n-r}=\theta$

必须 $l_0=l_1=\cdots=l_{n-r}=0$

将 $\gamma_i=\gamma_0+\xi_i\quad i=1,2,\cdots,n-r$

代入上式，整理之得到：

$$(l_0+l_1+\cdots+l_{n-r})\gamma_0+l_1\xi_1+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=\theta$$

应用γ_0是非齐次线性方程组的解，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是该非齐次线性方程组的导出齐次组的基础解系，可以证明：

$$l_0+l_1+\cdots+l_{n-r}=0\qquad(*)$$

由此有：

$$l_1\xi_1+\cdots+l_{n-r}\xi_{n-r}=\theta$$

因$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关，所以必须$l_i=0$，$i=1,2,\cdots,n-r$，

进一步由（*）式得出．$l_0=0$。

于是：$\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-r}$线性无关。

（2）令γ为非齐次线性方程组的任一解，则$\gamma-\gamma_0$为其导出齐次组的解．而

$$\gamma_i-\gamma_0=\xi_i \quad i=1,2,\cdots,n-r$$

是导出齐次组的基础解系，故有

$$\gamma-\gamma_0=k_1(\gamma_1-\gamma_0)+k_2(\gamma_2-\gamma_0)+\cdots+k_{n-r}(\gamma_{n-r}-\gamma_0)$$

即得：

$$\gamma=(1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\gamma_0+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}$$

令 $1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r}=k_0$，即 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=1$

则有：

$$\gamma=k_0\gamma_0+k_1\gamma_1+k_2\gamma_2+\cdots+k_{n-r}\gamma_{n-r}$$

11．（1）令α为(Ⅰ)′的任一解，γ_0为(Ⅰ)的任一解，则$\alpha+\gamma_0$也是(Ⅰ)的解。

因为(Ⅰ)和(Ⅱ)同解，所以$\alpha+\gamma_0$和γ_0是(Ⅱ)的解，进一步得到：$(\alpha+\gamma_0)-\alpha=\gamma_0$是(Ⅱ)′的解。

同理可证(Ⅱ)′的任一解也是(Ⅰ)′的解。

（2）若不假定(Ⅰ)有解，在(Ⅰ)与(Ⅱ)同解的情形下，也包括无解的情形，显然(Ⅰ)′与(Ⅱ)′未必同解．例如，取(Ⅰ)和(Ⅱ)分别是系数阵的秩数不相等的无解的线性方程组时，则(Ⅰ)′与(Ⅱ)′不同解。

如

$$\begin{cases}4x_1+6x_2+8x_3=5\\2x_1+3x_2+4x_3=3\\6x_1+9x_2+12x_3=7\end{cases}\qquad(\text{Ⅰ})$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=3\\4x_1+6x_2+8x_3=4\\2x_1+2x_2\qquad\quad=4\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})$$

(Ⅰ)和(Ⅱ)都没有解，其系数阵的秩分别为1和2。

（3）当(Ⅰ)′和(Ⅱ)′同解时，(Ⅰ)和(Ⅱ)不一定都一定有解。可以举出(Ⅰ)′和(Ⅱ)′同解，而(Ⅰ)和(Ⅱ)其中一个有解但另一个没有解的例子。

12．必要性　设 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是非齐次线性方程组（1）的解，则有：

$$\begin{cases} a_{11}d_1+a_{12}d_2+\cdots+a_{1n}d_n=b_1 \\ a_{21}d_1+a_{22}d_2+\cdots+a_{2n}d_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}d_1+a_{m2}d_2+\cdots+a_{mn}d_n=b_m \end{cases} \quad (*)$$

再令 $(c_1,c_2,\cdots,c_m)$ 是齐次线性方程组（2）的任一解，则有：

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{21}c_2+\cdots+a_{m1}c_m=0 \\ a_{12}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{m2}c_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}c_1+a_{2n}c_2+\cdots+a_{mn}c_m=0 \end{cases}$$

用 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 分别乘（*）的第 $1,2,\cdots,m$ 个等式然后相加，即得

$$c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_mb_m=0$$

充分性　若 $(c_1,c_2,\cdots,c_m)$ 为（2）的解，且满足条件：

$$c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_mb_m=0$$

由此指出线性方程组（1）的系数阵的秩数等于其表示矩阵的秩数即可。

13．因为

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1s}x_s=c_1 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2s}x_s=c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{ms}x_s=c_m \end{cases}$$

无解，而其系数阵的秩为 r_2，所以其表示矩阵的秩数等于 r_2+1。

由于方程组（1）有解，所以其表示矩阵的秩数等于 r_1。

于是可知 $\mathrm{rank}G \leqslant r_1 + r_2 + 1$。

14. （1）$\gamma_0 = (1,0,1,1)$，$\alpha = (1,0,-1,2)$，通解为：$\gamma_0 + k\alpha$

（2）$\gamma_0 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{5}{9}, 0, 0\right)$，$\alpha = (5,-2,9,0)$。通解为：

$\gamma_0 + k\alpha$

（3）$\gamma_0 = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, 0\right)$，$\alpha_1 = \left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, 1, 0\right)$

$\alpha_2 = (0,2,0,1)$，通解为：

$\gamma_0 + k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$

（4）无解。

（5）$x_i = \frac{n(3-n)}{2(n-1)} + (n-i)$；$i = 1,2,\cdots,n$。

附录　关于连加号“Σ”

在数学中常常碰到若干个数连加的式子。例如，前n个自然数的和

$$1+2+3+\cdots+n;$$

前n个正奇数的和

$$1+3+5+\cdots+(2n-1);$$

等差数列 $a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots$前$n$项的和

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d);$$

等比数列 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^n, \cdots$，前$n$项的和

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}.$$

再如一元多项式就是一些单项式的和

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

而n元初等对称多项式都是一些特殊的和：

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_n.$$

又如，n阶行列式也是一个连加的式子，而且是比较复杂的连加式子，$n=3$时，三阶行列式是一个六项连加的式子，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{\tau(132)}a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{\tau(321)}a_{13}a_{22}a_{31}.$$

对于一个连加式子，为了书写简便，我们用一个数学符号来表示连加的意思，即用大写的希腊字母Σ（读音为西格玛）表示连加，从而使连加式子得到一种缩写的形式。例如

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i;$$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1);$$

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}ar^i,$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i.$$

一般地，则是

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=\sum_{i=1}^{m}b_i. \tag{1}$$

对缩写的连加式子（1）来说，b_i叫做通项，当中的 i 叫做连加 指 标。写 在Σ下边的 $i=1$ 及上边的m说明连加指标 i 的取值范围，意即 i 的取值是从 1 开始到m为止，换句话说就是连加指标 i 共取 1，2，……，m 这m个值。有时说明连加指标的取值规律一并都写在Σ的下边，比如

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=\sum_{1\leq i\leq m}b_i.$$

有的连加式子，通项不是用单纯的数字来体现它的连加指标。比 如 三 阶行列式的通项形式为 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$。这个通项由排列 $i_1i_2i_3$ 所唯一决定，而且表达三阶行列式的那个和恰好是让 $i_1i_2i_3$ 取遍一切三元排列得到的六项连加起来的结果。这就是说通项$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$的连加指标是排列 $i_1i_2i_3$，而它的取值范围是一切三元排列，于是有缩写形式如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2i_3\in S_3}(-1)^{\tau(i_1i_2i_3)}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

此处 S_3 是三元排列的集合。

还有的连加式子，其通项涉及两个连加指标。比如

$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n.$$

其通项为x_ix_j，而连加指标由 i 与 j 两个数来体现。容易看出连加指标 i，j 的取值规律是：$1\leq i<j\leq n$，于是，这个连加式子的缩写形式为

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j.$$

又如对一个$m\times n$矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdot & \cdot\ \cdots\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

考虑A的一切元素的和S，这S是一个连加式子，即

$$S=a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}+\cdots+a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}.$$

S的通项形式为 a_{ij}。这里也是两个连加指标 i 与 j 。二者的取值范围是$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。这样连加式子S的缩写形式为

$$S=\sum_{i,j=1}^{m,n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}.$$

这里顺便表明：两个连加符号的次序是可交换的。

事实上

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in})$$
$$=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}).$$

这个连加过程的结果就是把A的元素一行一行的加起来得到的。

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})$$
$$=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn}),$$

这个连加过程的结果就是把 A 的元素一列一列的加起来得到的。当然，如此得到的两个结果是相同的。这就说明两个Σ的次序可交换。

最后我们指出应当注意的两点：

1. 连加指标与所用字母无关。即

$$\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{j=1}^{n}j=\sum_{s=1}^{n}s=1+2+3+\cdots+n;$$

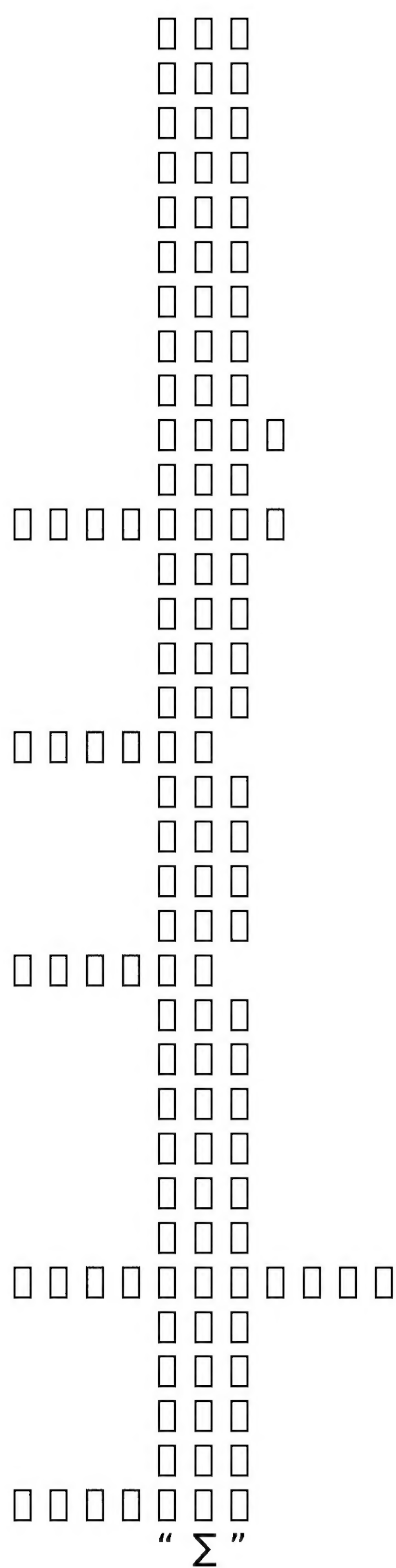
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{lj}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}a_{ls}.$$

2. 通项中的字母有的不是连加指标。如

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$$

的通项 a_{ij} 的下标 i，对连加号$\sum\limits_{j=1}^{n}$来说就不是连加指标。因此它在连加式的各个项中都是一样的。

[General Information]
□□=□□□□ □□□□
□□=
□□=471
SS□=0
□□□□=
Vss□=89479901


“Σ”